Rev.Acad.Canar.Cienc., XI (Núms. 1-2), 167-182 (1999)

LA ECUACIÓN LOGÍSTICA CON INHIBICIÓN FUERTE Y COSECHA

Francisco Montes de Oca - José Sarabia
Universidad Centroccidental Lisandro Alvarado
Departamento de Matemáticas
Apartado Postal 400
Barquisimeto, Venezuela

Resúmen: En este trabajo se consideran los efectos de la inhibición fuerte y la cosecha sobre una población aislada, modelada por una ecuación de Riccati de grado tres. Se prueba la existencia de soluciones acotadas sobre $\mathbb{R}$, con su respectivo comportamiento asintótico. Además se demuestra la existencia de tres soluciones T-periódicas si los coeficientes son T-periódicas.

Palabras claves: Ecuación de Riccati.

Abstract: In this work are considered the effects of the strong inhibition and the harvesting on an isolated population, modeled by a Riccati's equation of degree three. The existence of bounded solutions is proven on $\mathbb{R}$, with its asymptotic behavior. The existence of three T-periodic solutions is also demonstrated if the coefficients are T-periodic.

Keywords: Riccati's equation.

AMS Subject Classification. 34D05,34C27.

1 Introducción

En este trabajo consideramos la ecuación diferencial no autónoma:

$$x'(t) = a(t)x(t) - b(t)x(t)^3 - c(t) \tag{1}$$

Esta ecuación diferencial modela el comportamiento de una población aislada donde el efecto inhibidor de la propia especie es fuerte y además hay cosecha. Todo esto en la misma línea con que se realizaron los trabajos [3],[4] y [5].

En este caso $a(t)$ es el coeficiente de crecimiento, $b(t)$ es el coeficiente de inhibición y $c(t)$ es la rata de cosecha. Tales funciones son continuas en $\mathbf{R}$, acotadas superior e inferiormente por constantes positivas. Así mismo denotamos por $a_L = \inf\{a(t) : t \in \mathbf{R}\}$ y $a_M = \sup\{a(t) : t \in \mathbf{R}\}$, y similarmente tenemos b_L, b_M, c_L y c_M. Denominaremos I_x al intervalo maximal de existencia de una solución $x(t)$ conteniendo al cero.

En el caso autónomo tenemos los siguientes resultados:

(A) Si $a^3 > \frac{27bc^2}{4}$, hay tres puntos de equilibrio: α_1, α_2 y α_3 con $\alpha_3 < 0 < \alpha_2 < \alpha_1$, y el comportamiento de las soluciones $x(t)$ de (1) depende del tamaño inicial de la población $x(0) = x_0$ en la forma siguiente:

(i) Si $x_0 > \alpha_1$, entonces $I_x = (\beta, \infty)$ con $\beta < 0$, $x(t)$ decrece; $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \alpha_1$ y $\lim\limits_{t\to\beta^+} x(t) = \infty$.

(ii) Si $\alpha_2 < x_0 < \alpha_1$, entonces $I_x = \mathbf{R}$, $x(t)$ es acotada y creciente; $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \alpha_1$ y $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = \alpha_2$.

(iii) Si $\alpha_3 < x_0 < \alpha_2$, entonces $I_x = \mathbf{R}, x(t)$ es acotada y decreciente; $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \alpha_3$ y $\lim\limits_{t\to-\infty} x(t) = \alpha_2$.

En (iii) hay extinción de la especie en tiempo finito, de manera que α_2 es el *número crítico de extinción.*

(iv) Si $x_0 < \alpha_3$, entonces $I_x = (\beta, \infty)$ con $\beta > 0$, $x(t)$ crece, $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = \alpha_3$ y $\lim\limits_{t\to\beta^+} x(t) = -\infty$.

Finalmente tenemos que $x_1(t) = \alpha_1$ y $x_3(t) = \alpha_3$ son atractores positivos, y $x_2(t) = \alpha_2$ es atractor negativo.

(B) Si $a^3 = \frac{27bc^2}{4}$, hay dos puntos de equilibrio $\alpha_1 = \alpha_2$ y α_3, con: $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha > 0 > \alpha_3$. En este caso si:

(i) Si $x_0 > \alpha, x(t)$ tiene el mismo comportamiento que A (i).

(ii) Si $\alpha_3 < x_0 < \alpha$, entonces $I_x = \mathbf{R}, x(t)$ es acotada y decreciente, $\lim_{t\to\infty} x(t) = \alpha_3$ y $\lim_{t\to-\infty} x(t) = \alpha$. En este caso hay extinción en tiempo finito, siendo α el número crítico de extinción.

(iii) Si $x_0 < \alpha_3$, entonces $x(t)$ tiene el mismo comportamiento que A (iv). En este caso $x(t) = \alpha$ no es atractor positivos ni negativo, mientras que $x(t) = \alpha_3$ es atractor positivo.

(C) Si $a^3 < \frac{27bc^2}{4}$, hay un punto de equilibrio $\alpha < 0$. En este caso:

(i) Si $x_0 > \alpha, x(t)$ tiene el mismo comportamiento que A (i) y B (i). Hay extinción aunque x_0 sea muy grande.

(ii) Si $x_0 < \alpha, x(t)$ tiene el mismo comportamiento que A (iv) y B (iii). En este caso $x(t) = \alpha$ es atractora positiva.

Nota: En realidad no se pierde generalidad al estudiar el modelo (1) en lugar de

$$y'(t) = Ay(t) - By^2(t) - Cy^3(t) - D \quad , \tag{2}$$

pues haciendo $y(t) = x(t) - \frac{B}{3C}$; en (2) nos resulta (1), con:

$$a = \frac{B^2}{3C} + A \;\; ; \;\; b = C \;\; ; \;\; c = \frac{-B}{27C^2} + D + \frac{AB}{3C} - \frac{1}{3}\left(\frac{B}{C}\right)' + \frac{B^3}{9C^2}$$

donde se pide que $\frac{B}{C}$ sea derivable en $\mathbf{R}$.

El propósito fundamental de este trabajo es estudiar (1) en el caso en que:

$$a_L^3 > \frac{27}{4} b_M c_M^2 \qquad \text{(bitrisecante)} \tag{3}$$

2 Lemas Preliminares

Consideremos las siguientes ecuaciones diferenciales autónomas de Riccati:

$$x'(t) = a_L x - b_M x^3 - c_M \quad \text{(inferior)} \tag{4}$$

$$x'(t) = a_M x - b_L x^3 - c_L \quad \text{(superior)} \tag{5}$$

Bajo la condición (3), tanto $\phi_L = a_L x - b_M x^3 - c_M$ como $\phi_M = a_M x - b_L x^3 - c_L$ tienen tres raíces reales distintas : $\alpha_{L1} > \alpha_{L2} > 0 > \alpha_{L3}$ y $\alpha_{M1} > \alpha_{M2} > 0 > \alpha_{M3}$, pues:

$$a_M^3 \geq a_L^3 > \frac{27}{4} b_M c_M^2 \geq \frac{27}{4} b_L c_L^2$$

En cuanto a la posición relativa de las raíces tenemos los siguientes casos:

(I) Si $a(t)$ y $b(t)$ son constantes, entonces:

$$\alpha_{L3} < \alpha_{M3} < 0 < \alpha_{M2} < \alpha_{L2} < \alpha_{L1} < \alpha_{M1}$$

(II) Si $a(t)$ o $b(t)$ no son constantes, entonces existe $\bar{x} \leq 0$ tal que $\phi_L(\bar{x}) = \phi_M(\bar{x})$, tal $\bar{x}$ es único, en cuyo caso se pueden presentar tres subcasos, en cuanto a la posición relativa de $\bar{x}$ respecto de α_{M3}.

(II.1) $\bar{x} > \alpha_{L3}$, y entonces:

$$\alpha_{M3} < \alpha_{L3} < \bar{x} \leq 0 < \alpha_{M2} < \alpha_{L2} < \alpha_{L1} < \alpha_{M1}$$

(II.2) $\bar{x} = \alpha_{L3}$, y entonces:

$$\bar{x} = \alpha_{M3} = \alpha_{L3} < 0 < \alpha_{M2} < \alpha_{L2} < \alpha_{L1} < \alpha_{M1}$$

(II.3) $\bar{x} < \alpha_{L3}$, y entonces:

$$\bar{x} < \alpha_{L3} < \alpha_{M3} < 0 < \alpha_{M2} < \alpha_{L2} < \alpha_{L1} < \alpha_{M1}$$

Observemos que en cualquier caso, siempre se cumple:

$$\alpha_{M2} < \alpha_{L2} < \alpha_{L1} < \alpha_{M1}$$

Lema 2.1 Sea $x(t)$ una solución de (1) tal que $x(t_0) = x_0 > \bar{x}$, y sean $x_L(t)$ y $x_M(t)$ las soluciones de (4) y (5), respectivamente, tales que : $x_M(t_0) = x_L(t_0) = x_0$. Entonces:

(a) $x_L(t) \leq x(t) \leq x_M(t) \quad \forall t \in I_x \cap I_{x_L} \cap I_{x_M} \cap [t_0, \infty)$.

(b) $x_M(t) \leq x(t) \leq x_L(t) \quad \forall t \in I_x \cap I_{x_L} \cap I_{x_M} \cap (-\infty, t_0)$.

(Si $x_0 < \bar{x}$, (a) y (b) se intercambian).

Demostración: Vea [2,pp. 26-27]

Lema 2.2 Si $x(t)$ es una solución de (1) tal que $x_0 > \alpha_{M1}$, entonces $I_x = (\beta_x, \infty)$ con $\beta_x < 0$. Además $x(t) > \alpha_{L1}$ $\forall t \in I_x$ y $x(\beta^+) = \infty$.

Demostración: Sea $x_L(t)$ una solución de (4) y $x_M(t)$ solución de (5) tales que $x_L(0) = x_M(0) = x_0$. Del caso autónomo sabemos que $I_{X_L} = (\beta_L, \infty), I_{x_M} = (\beta_M, \infty)$ con $\beta_M \leq \beta_L$. Además si $I_x = (\beta_x, \gamma_x)$ entonces por 2.1:

$$x_L(t) \leq x(t) \leq x_M(t) \quad \forall t \in \quad [0, \gamma_x)$$
$$x_M(t) \leq x(t) \leq x_L(t) \quad \forall t \in \quad (\beta_L, 0] \cap (\beta_x, 0]$$

Como: $\alpha_{L_1} < x_L(t) \leq x(t) \leq x_M(t) \leq x_M(0)$ en $[0, \gamma_x)$, tenemos que $\gamma_x = \infty$. Así mismo si $\beta_x = -\infty$, nos quedaría $x(\beta_M) \geq x_M(\beta_M^+) = \infty$, lo que es una contradicción, luego: $-\infty < \beta_x < 0$. Razonando de manera similar , tenemos : $\beta_M \leq \beta_X$. Además: $x(\beta_x^+) = \infty$ y como $x(t) \geq x_L(t) > \alpha_{L1}, \forall t \geq 0$ y $x(t) \geq x_M(t) > \alpha_{M1} > \alpha_{L1}$ en $(\beta_x, 0]$, entonces: $x(t) > \alpha_{L1}$, $\forall t \in I_x = (\beta_x, \infty)$.

Lema 2.3 Existe una solución $x(t)$ de (1) tal que $\alpha_{L1} \leq x(t) \leq \alpha_{M1}$ en $\mathbf{R}$ e $I_x = \mathbf{R}$.

Demostración: Sea $a \in [\alpha_{L1}, \alpha_{M1}]$ y sean $x_n(t), x_{L_n}(t)$ y $x_{M_n}(t)$ soluciones de (1), (4) y (5), respectivamente, tales que $x_n(-n) = X_{L_n}(-n) = x_{M_n}(-n) = a$. Claramente $I_{x_{L_n}} = (\beta_{L_n}, \infty), I_{x_{M_n}} = \mathbf{R}$ e $I_{x_n} = (\beta_n, \gamma_n)$, con $-n \in I_{x_n}$. En $[-n, \gamma_n)$ tenemos: $\alpha_{L1} \leq x_{L_n}(t) \leq x_n(t) \leq x_{M_n}(t) \leq \alpha_{M1}$, luego $\gamma_n = \infty$, o sea $\alpha_{L1} \leq x_n(t) \leq \alpha_{M1}, \forall t \in [-n, \infty)$, y en consecuencia $\{x_n(0)\}$ es acotada, luego existen $\{x_{n_k}(0)\}$ y $x_0 \in [\alpha_{L1}, \alpha_{M1}]$ tales que $\{x_{n_k}(0)\} \to x_0$. Sea $x(t)$ la solución de (1) tal que $x(0) = x_0$, luego existe una subsucesión de $\{x_{n_k}\}$ (la cual denotaremos igual), tal que $x_{n_k}(t)$ converge uniformemente hacia $x(t)$ es subintervalos compactos de $I_x = (\beta_x, \gamma_x)$.

Luego $x(t)$ está definida en todo $\mathbf{R}$, es decir, $\beta_x = -\infty$, y por lo tanto: $\alpha_{L1} \leq x(t) \leq \alpha_{M1}, \forall t \in \mathbf{R}$.

Lema 2.4 Sea $x(t)$ una solución de (1) tal que $\alpha_{L2} \leq x(0) \leq \alpha_{L1}$, entonces $I_x = \mathbf{R}$ y $\alpha_{M2} < x(t) < \alpha_{M1}, \forall t \in \mathbf{R}$.

Demostración: Sea $b \in [\alpha_{L2}, \alpha_{M2}]$, y $x(t), x_L(t)$ y $x_M(t)$ soluciones de (1), (4) y (5), respectivamente, tales que $x(0) = x_L(0) = x_M(0) = b$. Entonces $I_{x_L} = I_{x_M} = \mathbf{R}$, y

$$\alpha_{L2} \leq x_L(t) \leq x(t) \leq x_M(t) < \alpha_{M1} \quad \forall t \in [0, \gamma_x)$$

$$\alpha_{M2} < x_M(t) \leq x(t) \leq x_L(t) \leq \alpha_{L1} \quad \forall t \in (\beta_x, 0]$$

Luego: $\alpha_{M2} < x(t) < \alpha_{M1}, \forall t \in I_x$, por lo tanto $I_x = \mathbf{R}$.

Lema 2.5 Existe una solución $x(t)$ de (1) tal que $I_x = \mathbf{R}$ y $\alpha_{M2} \leq x(t) \leq \alpha_{L2}, \forall t \in \mathbf{R}$. Además cualquier solución $x(t)$ de (1) con $\alpha_{M2} \leq x(0) \leq \alpha_{L2}$ está definida en todo $\mathbf{R}$ y $\alpha_{L3} < x(t) < \alpha_{M1}, \forall t \in \mathbf{R}$.

Demostración: Sea $x(t)$ una solución de (1) tal que $\alpha_{M2} \leq x(0) \leq \alpha_{L2}$, sea $x_L(t)$ una solución de (4) y $x_M(t)$ una solución de (5) tales que $x_L(0) = x_M(0) = x(0)$. Como $I_{x_L} = I_{x_M} = \mathbf{R}$, entonces:

$$\begin{aligned} \alpha_{L3} < x_L(t) \leq x(t) \leq x_M(t) &< \alpha_{M1} \quad \text{en } [0, \gamma_x) \\ \alpha_{L3} < \alpha_{M2} \leq x_M(t) \leq x(t) \leq x_L(t) \leq \alpha_{L2} &< \alpha_{M1} \quad \text{en } (\beta_x, 0] \end{aligned}$$

Luego, $I_x = \mathbf{R}$ y $\alpha_{L3} < x(t) < \alpha_{M1}, \forall t \in \mathbf{R}$.

Ahora sea $b \in [\alpha_{M2}, \alpha_{L2}]$ y sean $x_n(t), x_{L_n}(t), x_{M_n}(t)$ las soluciones de (1),(4) y (5) respectivamente, tales que $x_n(n) = x_{L_n}(n) = x_{M_n}(n) = b$. Entonces en $(\beta_n, n]$ tenemos: $\alpha_{M2} \leq x_{M_n}(t) \leq x_n(t) \leq x_{L_n}(t) \leq \alpha_{L2}$, luego $\beta_n = -\infty$. O sea $\alpha_{M2} \leq x_n(t) \leq \alpha_{L2}$, para $t \in (-\infty, n]$. Argumentando en forma similar que en el lema 2.3, tenemos que existe una solución $x(t)$ de (1), tal que $I_x = \mathbf{R}$ y $\alpha_{M2} \leq x(t) \leq \alpha_{L2} \ \forall t \in \mathbf{R}$.

Lema 2.6 Si $\alpha_{M3} \geq \alpha_{L3}$ (Casos I, II.2 ó II.3) y $x(t)$ es una solución de (1) tal que $\alpha_{M3} \leq x(0) \leq \alpha_{M2}$, entonces $I_x = \mathbf{R}$ y $\alpha_{L3} \leq x(t) < \alpha_{L2}$ para cada $t \in \mathbf{R}$. (En el caso II.3, tomamos $\alpha_{M3} < x(0)$).

Demostración: La prueba es similar al lema 2.4.

Lema 2.7 Si $\alpha_{M3} < \alpha_{L3}$, entonces cualquier solución de (1) tal que $\alpha_{L3} \leq x(0) \leq \alpha_{M2}$ está definida en todo $\mathbf{R}$ y $\alpha_{M3} < x(t) < \alpha_{L2}$ $\forall t \in \mathbf{R}$.

Demostración: Sea $a_1 \in (\bar{x}, \alpha_{M2}]$, sean $x(t), x_L(t)$ y $x_M(t)$ soluciones de (1),(4) y (5) respectivamente, tales que $x(0) = x_L(0) = x_M(0) = a_1$.

En $(\beta_x, 0]$ tenemos: $\alpha_{M3} < \alpha_{L3} \leq x_M(t) \leq x(t) \leq x_L(t) < \alpha_{L2}$.

Así mismo, como $a_1 > \bar{x}$, existe $t_1 > 0$ tal que en $(0, t_1] \cap [0, \gamma_x)$ se cumple:

$$\alpha_{M3} < \alpha_{L3} < x_L(t) \leq x(t) \leq x_M(t) \leq \alpha_{M2}$$

Mientras que en $(t_1, \infty) \cap [0, \gamma_x)$:

$$\alpha_{M3} < x_M(t) \leq x(t) \leq x_L(t) < \alpha_{L2} \quad ,$$

entonces $x(t)$ es acotado en I_x, y por lo tanto $I_x = \mathbf{R}$. De manera que:

$$\alpha_{M3} < x(t) < \alpha_{L2} \ \ \forall t \in \mathbf{R} \quad .$$

Sea $a_2 \in [\alpha_{L3}, \bar{x})$ y sean $x(t), x_L(t)$ y $x_M(t)$ soluciones de (1),(4) y (5) respectivamente, tales que $x(0) = x_L(0) = x_M(t) = a_2$.

En $[0, \gamma_x)$ tenemos: $\alpha_{M3} < x_M(t) \leq x(t) \leq x_L(t) < \alpha_{L2}$

Como $a_2 < \bar{x}$, $\lim_{t \to -\infty} x_L(t) = \alpha_{L2} > \alpha_{M2} = \lim_{t \to -\infty} x_M(t)$, entonces existe $t_2 < 0$ tal que en $(t_2, 0) \cap (\beta_x, 0]$ se cumple:

$$\alpha_{M3} < \alpha_{L3} \leq x_L(t) \leq x(t) \leq x_M(t) \leq \alpha_{M2}$$

Mientras que en $(-\infty, t_2) \cap (\beta_x, 0]$ se tiene:

$$\alpha_{M3} < x_M(t) \leq x(t) \leq x_L(t) < \alpha_{L2}$$

Finalmente: $\alpha_{M3} < \alpha_{L3} \leq x_L(t_2) = x_M(t_2) < \alpha_{M2}$; luego tenemos que: $x(t)$ es acotada en I_x y por lo tanto $I_x = \mathbf{R}$. Así mismo:

$$\alpha_{M3} < x(t) < \alpha_{L2} \quad \forall t \in \mathbf{R} \quad .$$

Por último, si $x(t)$ es solución de (1) tal que $x(0) = \bar{x}$, tomamos a_1 y a_2 tales que: $\alpha_{L3} < a_2 < \bar{x} < a_1 < \alpha_{M2}$, entonces para $x_i(t)$ solución de (1) con $x(0) = a_i$, tenemos por unicidad que $\alpha_{M3} < x_2(t) < x(t) < x_1(t) < \alpha_{L2}$ $\forall t \in I_x$. Luego $I_x = \mathbf{R}$ y $\alpha_{M3} < x(t) < \alpha_{L2}, \forall\ t \in \mathbf{R}$.

Lema 2.8 Si $\alpha_{L3} < \alpha_{M3}$, existe una solución $x(t)$ de (1) tal que $I_x = \mathbf{R}$ y $\alpha_{L3} \leq x(t) \leq \alpha_{M3}$; mientras que si $\alpha_{M3} < \alpha_{L3}$, entonces $\alpha_{M3} \leq x(t) \leq \alpha_{L3}$ en $\mathbf{R}$. Si $\alpha_{M3} = \alpha_{L3}$, entonces la solución $x(t)$ que pasa por α_{M3} está definida en todo $\mathbf{R}$ y $x(t) \leq L_2$ $\forall t \in \mathbf{R}$.

Demostración: Tanto en el caso I, como en los casos II.1 y II.3, podemos proceder de la misma forma que en el Lema 2.3. Si $\alpha_{M3} = \alpha_{L3} = \bar{x}$, tomamos $\{a_n\}$ en $(\alpha_{M3}, \alpha_{M2})$ tal que $a_n \to \bar{x}$. Si $x_n(t)$ es solución de (1) tal que $x_n(0) = a_n$, como $a_n \to \bar{x}$, entonces existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que converge uniformemente a $\bar{x}(t)$ solución de (1) tal que $\bar{x}(0) = \bar{x}$, en compactos de $\mathbf{R}$, luego $I_{\bar{x}} = \mathbf{R}$. Además por el Lema 2.6, $\alpha_{L3} \leq x_n(t) < \alpha_{L2}$, luego $\alpha_{L3} \leq \bar{x}(t) \leq \alpha_{L2}$ en $\mathbf{R}$.

Lema 2.9 Si $\alpha_{L3} \leq \alpha_{M3}$ y $x(t)$ es una solución de (1) tal que $x(0) < \alpha_{L3}$, entonces existe $\beta_x < 0$ tal que $I_x = (\beta_x, \infty), x(t) < \alpha_{M3}$ en I_x y $\lim_{t \to \beta_x^+} x(t) = -\infty$.

Demostración: Si $\psi(x) > 0, \forall x \in \mathbf{R}$ entonces $\alpha_{L3} < \alpha_{M3}$, y tomando $x_L(t), x_M(t)$ soluciones de (4) y (5), respectivamente, tales que $x_L(0) = x_M(0) = x(0)$, se puede probar que $I_x = (\beta_x, \infty)$ con $\beta_L \leq \beta_x \leq \beta_M$, ya que en $[0, \gamma_x)$:

$$x_L(0) \leq x_L(t) \leq x(t) \leq x_M(t) < \alpha_{L3} \leq \alpha_{M3}$$

Mientras que en $(\beta_x, 0]$ se cumple: $x(t) \leq x_L(t) < \alpha_{L3} \leq \alpha_{M3}$. Luego $x(t) < \alpha_{M3}, \forall t \in (\beta_x, \infty)$ y $\lim_{t \to \beta_x^+} x(t) = -\infty$.

Por otra parte, si existe $\bar{x}$ tal que $\psi(\bar{x}) = 0$ y $\alpha_{L3} < \alpha_{M3}$, entonces $\bar{x} < \alpha_{L3} < \alpha_{M3}$. Sea $x(t)$ solución de (1) tal que $\bar{x} < x(0) < \alpha_{L3}$, usando el mismo razonamiento que en el caso anterior, tenemos que existe $\beta_x < 0$ tal que $I_x = (\beta_x, \infty)$, pero esta vez resulta: $\beta_M \leq \beta_x \leq \beta_L$, pues x_L y x_M se cruzan en $t_1 = 0$ y en un cierto $t_2 < 0$. Así mismo $\lim_{t \to \beta_x^+} x(t) = -\infty$ y

$x(t) < \alpha_{M3}\ \ \forall t \in I_x = (\beta_x, \infty)$, pues

$$\begin{array}{lll} \text{en} & [0,\infty) & : x(t) \le x_M(t) < \alpha_{M3} \\ \text{en} & [t_2, 0) & : x(t) \le x_L(t) < \alpha_{L3} < \alpha_{M3} \\ \text{y en} & (\beta_x, t_2) & : x(t) \le x_M(t) \le x_M(0) < \alpha_{L3} < \alpha_{M3} \end{array}$$

Al mismo resultado se llega si $x(0) = \bar{x} < \alpha_{L3}$, con $\beta_M \le \beta_x \le \beta_L$. Así mismo si $x(0) = \bar{x} < \alpha_{L3}$, tomando a_1, a_2 tales que: $a_1 < \bar{x} < a_2 < \alpha_{L3}$, para $x_1(t)$ y $x_2(t)$ soluciones de (1) cumpliendo con $x_i(0) = a_i (i = 1,2)$ se tiene que $x_1(t) < x(t) < x_2(t) < \alpha_{M3}\ \ \forall t \in I_{x_1} \cap I_{x_2} \cap I_x$, pero siguiendo el mismo esquema de demostración tenemos que $\gamma_x = \infty$, ya que $\gamma_{x_1} = \gamma_{x_2} = \infty$. Así mismo: $-\infty < \beta_{x_2} \le \beta_x \le \beta_{x_1}$ y $\lim\limits_{t \to \beta_x^+} x(t) = -\infty$.

Finalmente si $\alpha_{L3} = \alpha_{M3}$, entonces $\alpha_{L3} = \alpha_{M3} = \bar{x}$. De nuevo para $x_L(t)$ y $x_M(t)$ con $x_L(0) = x_M(0) = x(0)$, entonces: $x_M(0) \le x_M(t) \le x(t) \le x_L(t) < \alpha_{L3}$ en $[0, \gamma_x)$, luego $\gamma_x = \infty$, además como $\beta_L \ge \beta_M > -\infty$, entonces $\beta_L \ge \beta_x \ge \beta_M > -\infty$ y $x(t) < \alpha_{M3}$, para todo $t \in I_x = (\beta_x, \infty)$.

Lema 2.10 Si $\alpha_{M3} < \alpha_{L3}$ y $x(t)$ es una solución de (1) tal que $x(0) < \alpha_{M3}$ entonces existe $\beta_x < 0$ tal que $I_x = (\beta_x, \infty)$ y $x(t) < \alpha_{M3}\ \ \forall t \in I_x$.

Demostración: El razonamiento es similar a los anteriores, con $-\infty < \beta_M \le \beta \le \beta_L < 0$, ya que $\alpha_{M3} < \alpha_{L3} < \bar{x}$.

3 Existencia de Soluciones Acotadas y Comportamiento Asintótico

Teorema 1 Dada la ecuación diferencial (1), bajo la condición $a_L^3 > \frac{27}{4} b_M c_M^2$. Existen soluciones $X_i(t) (i = 1,2,3)$ acotadas en $\mathbf{R}$ tales que $X_3(t) < X_2(t) < X_1(t)$ y con $d(X_1, X_2,) \ge \alpha_{L1} - \alpha_{L2} > 0$ y $d(X_2, X_3) \ge \alpha_{M2} - \max\{\alpha_{L3}, \alpha_{M3}\} > 0$ si $\alpha_{L3} \ne \alpha_{M3}$. Por otra parte si $x(t)$ es una solución de (1) con:

(i) $x(0) > X_1(0)$, entonces existe $\beta_x < 0$ tal que $I_x = (\beta_x, \infty)$, $\lim\limits_{t \to \beta_x^+} x(t) = \infty$ y $\lim\limits_{t \to \infty} [x(t) - X_1(t)] = 0$.

(ii) $X_2(0) < x(0) < X_1(0)$, entonces $I_x = \mathbf{R}$ con $\lim_{t\to\infty}[X_1(t) - x(t)] = 0$ y $\lim_{t\to-\infty}[x(t) - X_2(t)] = 0$.

(iii) $X_3(0) < x(0) < X_2(0)$, entonces $I_x = \mathbf{R}$ con $\lim_{t\to\infty}[x(t) - X_3(t)] = 0$ y $\lim_{t\to-\infty}[X_2(t) - x(t)] = 0$.

(iv) $x(0) < X_3(0)$, entonces existe $\beta_x < 0$ tal que $I_x = (\beta_x, \infty)$, $\lim_{t\to\beta_x^+} x(t) = -\infty$ y $\lim_{t\to\infty}[X_3(t) - x(t)] = 0$.

Demostración: Sea $\Omega_1 = \{x(t) :$ solución de (1) con $I_x = \mathbf{R}$ y $x(t) \geq \alpha_{M2}, \forall t \in \mathbf{R}\}$. Por el Lema 2.3, existe una solución $x(t)$ de (1) tal que $I_x = \mathbf{R}$ y $\alpha_{L1} \leq x(t) \leq \alpha_{M1}$ $\forall t \in I_x$. Luego $\alpha_{M2} < \alpha_{L1} \leq x(t)$, por lo tanto $x(t) \in \Omega_1$ y por lo tanto $\Omega_1 \neq \emptyset$.

Sea $\Omega_1^{(0)} = \{x(0) : x \in \Omega_1\}$. Por el lema 2.2, α_{M1} es cota superior de $\Omega_1^{(0)}$. Así mismo $x(0) \geq \alpha_{M2}, \forall x \in \Omega_1$, luego existe $\Omega_{M1} = \sup \Omega_1^{(0)}$ y $\Omega_{L1} = \inf \Omega_1^{(0)}$.

Así mismo, si $c \in [\alpha_{L2}, \alpha_{L1}]$ y $x(t)$ es una solución de (1) tal que $x(0) = c$, entonces por el lema 2.4, tenemos que $I_x = \mathbf{R}$ y $\alpha_{M2} < x(t) < \alpha_{M1}$ $\forall t \in \mathbf{R}$, luego $x(t) \in \Omega_1$, y por lo tanto $x(0) = x \in \Omega_1^{(0)}$, luego $[\alpha_{L2}, \alpha_{L1}] \subset \Omega_1^{(0)}$, de aquí tenemos: $0 < \Omega_{L1} < \Omega_{M1}$. Probemos que $\{\Omega_{L1}, \Omega_{M1}\} \subset \Omega_1^{(0)}$.

En efecto, sean $X_1(t)$ y $X_2(t)$ soluciones de (1) tales que $X_1(0) = \Omega_{M1}$ y $X_2(0) = \Omega_{L1}$. Como $\Omega_{M1} = \sup \Omega_1^{(0)}$, existe una sucesión $\{a_n\}$ en $\Omega_1^{(0)}$ tal que $a_n \to \Omega_{M1}$. Sea $\{x_n(t)\}$ una sucesión de soluciones de (1) tales que $x_n(0) = a_n$; por unicidad $x_n(t) \in \Omega_1$ y por lo tanto $I_{x_n} = \mathbf{R}$ y $x_n(t) \geq \alpha_{M2}$ $\forall t \in \mathbf{R}$. Luego existe una subsucesión $\{x_{n_k}\}$ tal que $x_{n_k}(t)$ converge uniformemente a $X_1(t)$ en cada subintervalo compacto de $\mathbf{R}$, entonces $I_{X_1} = \mathbf{R}$ y $X_1(t) \geq \alpha_{M2}$, luego $X_1 \in \Omega_1$, y por lo tanto $\Omega_{M1} \in \Omega_1^{(0)}$. En forma similar demostramos que $\Omega_{L1} \in \Omega_1^{(0)}$.

Por los lemas 2.2 y 2.3, tenemos que: $\alpha_{L1} \geq X_1(t) \leq \alpha_{M1}$ $\forall t \in \mathbf{R}$. Por el lema 2.5, resulta: $\alpha_{M2} \leq X_2(t) \leq \alpha_{L2}$. De lo anterior, tenemos:

$X_1(t) - X_2(t) \geq \alpha_{L1} - \alpha_{L2} > 0$, luego $d(X_1, X_2) \geq \alpha_{L1} - \alpha_{L2} > 0$. Sea $\Omega_2 = \{x(t) : x(t)$es solución de $(1), I_x = \mathbf{R}$ y $x(t) \leq \alpha_{L2}, \forall t \in \mathbf{R}\}$, por el lema 2.5, tenemos que $\Omega_2 \neq \emptyset$. Sea $\Omega_2^{(0)} = \{x(0) : x \in \Omega_2\}$ y supongamos que $\alpha_{L3} \leq \alpha_{M3}$. Por el lema 2.8, $\Omega_2^{(0)}$ está acotado inferiormente por α_{L3}, y por la manera como definimos Ω_2 tenemos que α_{L2} es una cota superior de $\Omega_2^{(0)}$. Sean $\Omega_{M2} = \sup \Omega_2^{(0)}$ y $\Omega_{L2} = \inf \Omega_2^{(0)}$, por el lema 2.6, probamos que $[\alpha_{M3}, \alpha_{M2}] \subset \Omega_2^{(0)}$ y por lo tanto $\Omega_{M2} > \Omega_{L2}$. Sean $X_2^*(t)$ la solución de (1) tal $X_2^*(0) = \Omega_{M2}$ y $X_3(t)$ la solución de (1) tal que $X_3(0) = \Omega_{L2}$, y razonando de manera similar a lo hecho con $X_1(t)$ y $X_2(t)$, se tiene que X_2^* y X_3 están definidas en todo $\mathbf{R}$, $\alpha_{M2} \leq x_2^*(t) \leq \alpha_{L2}$ $\forall t \in \mathbf{R}$.

Así mismo, si $\alpha_{M3} > \alpha_{L3}$, por el lema 2.7, tenemos que: $\alpha_{L3} \leq X_3(t) \leq \alpha_{M3}$ $\forall t \in \mathbf{R}$ y claramente $d(X_2^*, x_3) \geq \alpha_{M2} - \alpha_{M3} > 0$. Si $\alpha_{M3} = \alpha_{L3}$, tenemos que $\alpha_{L3} = \alpha_{M3} \leq X_3(t) \leq \alpha_{L2}$ y no podemos asegurar que $d(X_2^*, X_3) > 0$, aunque claramente $X_2^*(t) > X_3(t)$ en $\mathbf{R}$, por el lema 2.6.

Por otra parte, como $X_2(t) \leq \alpha_{L2}$ $\forall t \in \mathbf{R}$, entonces $X_2 \in \Omega_2$, luego $X_2(0) \leq X_2^*(0)$ para cualquier caso con α_{L3} y α_{M3}. (Posteriormente, demostraremos que $X_2(0) = X_2^*(0)$). Finalmente si $\alpha_{M3} < \alpha_{L3}$, definiendo Ω_2 de la misma forma que en los otros casos, aquí tenemos que α_{M3} es cota inferior de $\Omega_2^{(0)}$ y α_{L2} es cota superior, por el lema 2.9 y por definición de Ω_2, respectivamente. Además $[\alpha_{L3}, \alpha_{M2}] \subset \Omega_2^{(0)}$, por el lema 2.6. Todo lo demás sigue como el caso $\alpha_{M3} > \alpha_{L3}$, intercambiando los papeles de α_{L3} y α_{M3}. Luego $\alpha_{M2} < X_2^*(t) \leq \alpha_{L2}$ y $\alpha_{M3} \leq X_3(t) \leq \alpha_{L3}, \forall t \in \mathbf{R}$. Por lo tanto: $d(X_2^*, X_3) \geq \alpha_{M2} - \alpha_{L3} > 0$.

(i) Sea $x(t)$ una solución de (1) tal que $x(0) > X_1(0)$. Si $I_x = \mathbf{R}$, entonces como $x(t) > X_1(t) \geq \alpha_{L1} > \alpha_{L2} > \alpha_{M2}, \forall t \in \mathbf{R}$; tenemos que $x \in \Omega_1$, luego $x(0) \leq X_1(0)$, lo que es una contradicción. Finalmente de la acotación de $x(t)$ en $[0, \gamma_x)$ concluimos que $I_x = (\beta_x, \infty)$ con $\beta_x < 0$, y además $\lim_{t \to \beta_x^+} x(t) = \infty$. De (1) tenemos en $[0, \infty)$:

$$\frac{d}{dt} \ln \left| \frac{x(t) - X_1(t)}{x(t) - X_2(t)} \right| = -b(t)(X_1(t) - X_2(t))x(t) - b(t)(X_1^2(t) - X_2^2(t)) \quad (6)$$

$$\frac{d}{dt} \ln \left| \frac{x(t) - X_1(t)}{x(t) - X_2(t)} \right| < -b(t)(X_1(t) - X_2(t))x(t) \leq -b_L(\alpha_{L1} - \alpha_{L2})\alpha_{L1} \quad (7)$$

Luego integrando (7) entre 0 y t tenemos:

$$x(t) - X_1(t) \leq A(x(t) - X_2(t)) \exp[-b_L(\alpha_{L1} - \alpha_{L2})\alpha_{L1} t] \tag{8}$$

con $A = \left|\frac{x(0)-X_1(0)}{x(0)-X_2(0)}\right|$. Además ya que $x(t) < M = \max\{x_M(0), \alpha_{M1}\}$ en $[0, \infty)$, en (8), resulta: $0 < x(t) - X_1(t) \leq A(M - \alpha_{M2}) \exp[-b_L(\alpha_{L1} - \alpha_{L2})\alpha_{L1} t]$.

Por lo tanto: $\lim_{t\to\infty}(x(t) - X_1(t)) = 0$.

(ii) Sea $x(t)$ una solución de (1) tal que $X_2(0) < x(0) < X_1(0)$, luego $\forall t \in I_x, \alpha_{M2} \leq X_2(t) < x(t) < X_1(t) \leq \alpha_{M1}$, por lo tanto $I_x = \mathbf{R}$ y de (6) tenemos:

$$\frac{d}{dt} \ln \frac{X_1(t) - x(t)}{x(t) - X_2(t)} \leq -b(t)(X_1(t) - X_2(t))x(t) \leq -b_L(\alpha_{L1} - \alpha_{L2})\alpha_{M2} \tag{9}$$

Integrando entre entre 0 y t tenemos:

$$\begin{aligned} 0 &< X_1(t) - x(t) \leq A(x(t) - X_2(t)) \exp[-b_L(\alpha_{L1} - \alpha_{L2})\alpha_{M2} t] \\ 0 &< X_1(t) - x(t) \leq A(\alpha_{M1} - \alpha_{M2}) \exp[-b_L(\alpha_{L1} - \alpha_{L2})\alpha_{M2} t] \end{aligned}$$

Luego: $\lim_{t\to\infty}(X_1(t) - x(t)) = 0$.

Similarmente de (6) tenemos al integrar entre $t (t < 0)$ y 0:

$$\begin{aligned} x(t) - X_2(t) &\leq A^{-1}(X_1(t) - x(t)) \exp[b_L(\alpha_{L1} - \alpha_{L2})\alpha_{M2} t] \\ &\leq A^{-1}(\alpha_{M1} - \alpha_{M2}) \exp[b_L(\alpha_{L1} - \alpha_{L2})\alpha_{M2} t] \end{aligned}$$

Luego: $\lim_{t\to-\infty}(x(t) - X_2(t)) = 0$.

Ahora estamos en condiciones de probar que $X_2 = X_2^*$. Así en el teorema 1 vimos que $X_2(0) \leq X_2^*(0)$. Supongamos que $X_2(0) < X_2^*(0)$, como $X_2^*(0) < \alpha_{L2} \leq \alpha_{L1} \leq X_1(0)$, entonces $\lim_{t\to\infty}[X_1(t) - X_2^*(t)] = 0$, lo que es una contradicción, pues $X_2^*(t) \leq \alpha_{L2}, \forall t \in \mathbf{R}$. Luego $X_2^*(0) = X_2(0)$ y en consecuencia $X_2 = X_2^*$.

(iii) Sea $x(t)$ una solución de (1) tal que $X_3(0) < x(0) < X_2(0)$, luego

$\alpha^* = \min\{\alpha_{M3}, \alpha_{L3}\} \leq X_3(t) < x(t) < X_2(t) \leq \alpha_{L2}$ $\forall t \in I_x$, luego $I_x = \mathbf{R}$

Aplicando (6) a X_1, X_2, x y X_2, X_3 y x, tenemos al restar miembro a miembro:

$$\frac{1}{X_2 - X_3}\frac{d}{dt}\ln\frac{X_2 - x}{x - X_3} - \frac{1}{X_1 - X_2}\frac{d}{dt}\ln\frac{X_1 - x}{X_2 - x} = b(X_1 - X_3) \tag{10}$$

O sea:

$$\frac{d}{dt}\ln\frac{\left(\frac{X_1 - x}{X_2 - x}\right)^{\varepsilon_{12}}}{\left(\frac{X_2 - x}{x - X_3}\right)^{\varepsilon_{23}}} = -b(X_1 - X_3) \tag{11}$$

Donde $\varepsilon_{12}(t) = \frac{1}{X_1(t) - X_2(t)} > 0$ y $\varepsilon_{23}(t) = \frac{1}{X_2(t) - X_3(t)} > 0$.

Integrando (11) entre 0 y t ($t > 0$), tenemos:

$$\begin{aligned} H(t) &= \frac{(X_1(t) - x(t))^{\varepsilon_{12}}(x(t) - X_3(t))^{\varepsilon_{23}}}{(X_2(t) - x(t))^{\varepsilon_{12}+\varepsilon_{23}}} \\ &= H(0)\exp\int_0^t(-b(t)(X_1(t) - X_3(t))dt) \end{aligned} \tag{12}$$

De los respectivos acotamientos de $X_i(t)(i = 1,2,3)$, resulta de (12), para $t > 0$.

$$\begin{aligned} 0 &\leq (x(t) - X_3(t))^{\frac{1}{\alpha_{L2}-\alpha_*}} \\ &\leq (x(t) - X_3(t))^{\varepsilon_{23}} \\ &\leq \frac{(\alpha_{L2} - \alpha_*)^{\frac{1}{\alpha_{L1}-\alpha_{L2}} + \frac{1}{\alpha_{M2}-\alpha^*}}}{(\alpha_{L1} - \alpha^*)^{\frac{1}{\alpha_{M1}-\alpha_{M2}}}} H(0)e^{-b_L(\alpha_{L1}-\alpha^*)t} \end{aligned} \tag{13}$$

Donde $\alpha_* = \min\{\alpha_{L3}, \alpha_{M3}\}; \alpha^* = \max\{\alpha_{L3}, \alpha_{M3}\}$. De (13) tenemos que:

$$\lim_{t\to\infty}(x(t) - X_3(t)) = 0$$

De (11), integrando entre $t(t < 0)$ y 0, y usando las desigualdades adecuadas tenemos:

$$(X_2 - x)^{\frac{1}{\alpha_{M1}-\alpha_{M2}} + \frac{1}{\alpha_{L2}-\alpha_*}} \leq K(\alpha_{M1} - \alpha_*)^{\frac{1}{\alpha_{L1}-\alpha_{L2}}}(\alpha_{L2} - \alpha_*)^{\frac{1}{\alpha_{M2}-\alpha^*}} e^{b_L(\alpha_{L1}-\alpha^*)t} \tag{14}$$

Luego de (14), tenemos:

$$\lim_{t\to\infty}(X_2(t) - x(t)) = 0$$

(iv) Finalmente sea $x(t)$ solución de (1) tal que $x(0) < X_3(0)$ y sean $x_L(t)$ y $x_M(t)$ soluciones de (4) y (5), respectivamente, tales que $x_L(0) = x_M(0) = x(0)$. Como $I_x \neq \mathbf{R}$, y ya que $x_L(0) \leq x(t) \leq \alpha^*$, $\forall t \in [0, \gamma_x)$, entonces $\gamma_x = \infty$ y por lo tanto $I_x = (\beta_x, \infty)$, con $\beta_x < 0$. Por otra parte de $x(t) \leq \alpha^*$, tenemos que $\lim\limits_{t \to \beta_x^+} x(t) = -\infty$. Luego integrando (11) entre 0 y $t (t > 0)$, y usando las desigualdades correspondientes, resulta:

$$(X_3 - x)^{\frac{1}{\alpha_{L2} - \alpha_*}} \leq \frac{K(\alpha_{L2} - \alpha_*)^{\frac{1}{\alpha_{L1} - \alpha_{L2}} + \frac{1}{\alpha_{M2} - \alpha^*}}}{(\alpha_{L1} - \alpha^*)^{\frac{1}{\alpha_{M1} - \alpha_{M2}}}} e^{-b_L(\alpha_{L1} - \alpha^*)t} \tag{15}$$

Luego:

$$\lim_{t \to \infty} (X_3(t) - x(t)) = 0$$

Nota: En el lema 3.1 de [5] se demuestra que si $\dot{x} = x(a - bx) - c$ con a, b, c, continuas y con cotas superiores e inferiores positivas, tiene al menos una solución acotada en $\mathbf{R}$, entonces $a_M^2 > 4b_L c_L$. En nuestro caso pudiera pensarse que si hay solución acotada en $\mathbf{R}$, entonces $a_M^3 > \frac{27}{4} b_l c_L^2$, sin embargo esto no es necesario, pues de acuerdo al lema 2.8, siempre hay una solución no acotada definida en $\mathbf{R}$ entre α_* y α^*, con $\alpha_* = \min\{\alpha_{L3}, \alpha_{M3}\}$ y $\alpha^* = \max\{\alpha_{L3}, \alpha_{M3}\}$, inclusive si $\alpha_{L3} = \alpha_{M3} = \bar{x}$, la solución de (1) que cumple $\bar{x}(0) = \bar{x}$ tiene $I_{\bar{x}} = \mathbf{R}$ y $\alpha_{L3} = \alpha_{M3} \leq \bar{x}(t) \leq \alpha_{L2}$, $\forall t \in \mathbf{R}$.

4 Soluciones Periódicas

Teorema 2 Dada la ecuación (1) bajo la condición (3), con a, b y c periódicas de período T. entonces las $X_i(t) (i = 1, 2, 3)$ del teorema 1 son las únicas soluciones periódicas de (1) y además $d(X_2, X_3) > 0$. (Bajo la condición (3), recordemos que $d(X_1, X_2) \geq \alpha_{L1} - \alpha_{L2} > 0$ en cualquier caso).

Demostración: Sea $x(t)$ una solución de (1) tal que $x(0) > X_1(0)$, luego por el teorema 1, $I_x = (\beta_x, \infty)$ con $\beta_x < 0$. Además $\alpha_{L1} < x(t), \forall t \in I_x$ y es no periódica. Así mismo $x(0) > x(T)$ y $\{x(kT)\}_{k=1}^{\infty}$ es una sucesión decreciente, luego existe $\gamma_1 \in \mathbf{R}$ tal que $\lim\limits_{k \to \infty} x(kT) = \gamma_1$. Además $x_k(t) = x(t + kT)$ es solución de (1) con $I_{x_k} \neq \mathbf{R}$, luego $x(kT) > X(0)$ y por lo tanto $\gamma_1 \geq \Omega_{M1}$.

Si $\gamma_1 > \Omega_{M1}$, como $x(t;0,\gamma_1)$ es T-periódica, de acuerdo al teorema 4.11 en [1,p. 116], tendríamos una contradicción con el teorema 1, luego $\gamma_1 = \Omega_{M1}$ y por tanto $X_1(t) = x(t;0,\gamma_1)$ es T-periódica. De manera similar demostramos que $X_3(t)$ es T-periódica.

Sea $x(t)$ una solución de (1) tal que $X_2(0) < x(0) < X_1(0)$, la cual podemos suponer no periódica (teorema 9.6 en [1,pp. 102-103]), para tal solución debe cumplirse $x(-T) < x(0)$, de acuerdo a (ii) del teorema 1. Como $\{x(-kT)\}_{k=1}^{\infty}$ es decreciente y está acotada inferiormente por α_{M2}, existe $\lim_{k\to\infty} x(-kT) = \gamma_2$. Por otra parte $x_k(t) = x(t-kT)$ es solución de (1) con $x_k(0) \geq X_2(0), \forall k \in \mathbf{N}$. Por lo tanto $\gamma_2 \geq \Omega_{L1} = \Omega_{M2}$ y $x(t;0,\gamma_2)$ es periódica con $x(0;0,\gamma_2) = \gamma_2 > X_2(0)$. Sea $a \in (X_2(0),\gamma_2)$ y $x_a(t)$ la solución de (1) tal que $x_a(0) = a$. Siguiendo el mismo proceso anterior, tenemos que existe γ_3 tal que $\gamma_2 > \gamma_3 \geq X_2(0)$ y $x(t;0,\gamma_3)$ es periódica, entonces (1) tendría cuatro soluciones T-periódicas distintas, lo que es una contradicción. Luego $\gamma_2 = X_2(0)$ y por lo tanto $X_2(t) = x(t;0,\gamma_2)$ es T-periódica.

Finalmente como $X_2(0) > X_3(0)$, y ambos son T-periódicas es claro que $d(X_2, X_3) > 0$.

Referencias

1 J J. Hale y H. Koçak. *"Dynamic and Bifurcations"*. Springer Verlag, New York.**(1991)**.

2 P P. Hartman. *"Ordinary Differential Equations"*. Wiley, New York. **(1994)**.

3 F F. Montes de Oca y J. Sarabia. *Algunos Resultados sobre la ecuación Logística con Cosecha*. Rev. Tec. Ing. Univ. Zulia (por aparecer).

4 M F. Montes de Oca y J. Sarabia. *La ecuación Logística con Cosecha Autoreguladora bajo la Condición de Allen*. Rev. Acad. Canar. Cienc., VIII (Num. 1), 65-78. **(1996)**.

5 O F. Montes de Oca y J. Sarabia. *The Logistic Differential Equation subjecto to Harvesting*. Dynamic Sistem and Applications 5, 303-310. **(1996)**.

6 T A. Tineo. *Asymptotic Behaviour of Positive Solutions of the Nonautonomous Lotka-Volterra Competition Equations.* Diff. and Integral Equations, Vol. 6, Number 2, 449-457. **(1993)**.

7 H H. Turnbull. *"Teoría de Ecuaciones"*. Edit. Dossat, Madrid, 3era. edición.**(1962)**.