Recibido: viernes, 03 noviembre 2006

comunicación ::
matematicalia
revista digital de divulgación matemática
Vol. 3, no. 1 (feb. 2007)

El método matemático

Begoña Carrascal Platas
Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia
Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea
e-mail: b.carrascal@ehu.es

Introducción

Antes de empezar nuestro trabajo, creemos necesario escribir unas cuantas líneas para centrar el tema y de esta forma acotarlo mínimamente, ya que el título que nos fue propuesto es, en nuestra opinión, demasiado amplio y ambiguo para desarrollarlo en su totalidad en unas pocas páginas.

En este artículo no vamos a hablar de la crisis de las matemáticas de finales del siglo XIX como consecuencia del descubrimiento de paradojas en la teoría intuitiva de conjuntos de Cantor, aunque sea esta teoría la base del lenguaje de las matemáticas. En consecuencia, tampoco vamos a profundizar en temas relacionados con los fundamentos de las matemáticas, tengan éstos que ver con las diferentes propuestas que surgieron con el objetivo de buscar una solución a las paradojas, o con las distintas corrientes lógico-matemáticas que, a partir de dicha crisis, propusieron métodos y formas diferentes de desarrollo y fundamentación de las matemáticas.

Por otra parte, es bien sabido que uno de los objetivos prioritarios de las matemáticas es dar pruebas correctas de teoremas verdaderos. Hay muchos trabajos realizados por filósofos de las matemáticas en los que se ha tratado de clarificar cuáles son esos estándares de corrección y en qué basar la noción de verdad. Sin embargo, tampoco vamos a poder dedicar este artículo a esos trabajos.

Nuestro objetivo va a ser mucho más concreto y seguramente menos polémico; en primer lugar, trataremos de dar algunas ideas generales sobre el método de demostración matemático, intentando destacar algunos de los aspectos comunes presentes en toda demostración matemática, para mostrar, posteriormente, algunas de las formas más habituales de prueba matemática.

También citaremos muy brevemente alguno de los puntos a tener en cuenta a la hora de valorar una demostración matemática además de la misma demostración de la verdad de un enunciado, puntos éstos que, aunque presentes en todo proceso de creación o construcción de una demostración, no se suelen remarcar a la hora de hacer su presentación, lo cual, a nuestro entender, tendría una valor pedagógico añadido.

Aspectos generales del método matemático

Notación simbólica

Un aspecto central de la matemática moderna es el uso de notación abstracta. La principal función de un símbolo en matemáticas es designar con precisión y claridad un objeto o un concepto, así como abreviar una definición. El desarrollo de la matemática ha implicado un crecimiento continuo del uso de la notación simbólica y viceversa. El refinamiento de la notación matemática para expresar conceptos más y más abstractos ha facilitado el desarrollo de la matemática y ha permitido ir avanzando gradualmente en el camino que llevaba de las demostraciones gráficas a demostraciones más formales o analíticas.

Un lenguaje formal, a diferencia de un lenguaje natural, es un lenguaje en el que todos sus símbolos están completamente especificados y las reglas de formación de sus expresiones a partir de estos símbolos están perfectamente definidas. Los lenguajes lógicos son ejemplos de lenguajes formales.

La matemática, aunque basa sus demostraciones en reglas lógicas, en su práctica habitual utiliza un lenguaje semiformalizado, es decir, combina símbolos abstractos que nos sirven para designar los diferentes conceptos con oraciones del lenguaje natural que sirven de nexo de unión entre los pasos dados en una demostración.

Eso no quiere decir que no podríamos escribir las demostraciones matemáticas en un lenguaje totalmente formalizado, pero eso nos llevaría a especificar todos y cada uno de sus pasos, por muy evidentes que fueran, y a perder mucho tiempo traduciendo todos ellos en un lenguaje completamente formal.

Hoy en día, el lenguaje y notación básica de la matemática es el de la teoría de conjuntos desarrollada por G. Cantor a finales del siglo XIX. Además de los símbolos de la teoría de conjuntos, toda teoría matemática introduce símbolos para designar cada uno de los conceptos que van surgiendo en su desarrollo. Así, por ejemplo, la aritmética introduce símbolos para designar las operaciones entre números, $+$, $\times$, ..., la geometría para designar a los puntos, rectas, etc.

Para que un concepto se pueda utilizar con claridad es necesario que esté perfectamente definido, y para ello un primer paso es darle un nombre. En muchos casos, la notación matemática ayuda a fijar y expresar estos conceptos abstractos. Por ejemplo, el concepto de variable sería mucho más difícil de manejar sin la ayuda de la notación que utilizamos para denotar a las diferentes variables, *"x", "y"*,...; De hecho, el álgebra no se desarrolló durante la época griega y hasta bien entrado el siglo XVI debido, en gran parte, a la falta de notación simbólica para designar variables, que obligaba a cálculos muy complicados y que impedía ver nítidamente cómo se podía generalizar un problema.

Por otra parte, si nos preguntaran sobre cuál es la imagen que nos viene a la mente cuando nos planteamos un concepto matemático abstracto, en muchas ocasiones contestaríamos con la notación matemática que utilizamos para representarlo. Por ejemplo, el concepto matemático abstracto expresado por el número tres sería difícilmente explicable sin la notación que utilizamos para designarlo, *"3"*. Si nos cuestionamos sobre la imagen mental que asociamos con el número tres, contestaríamos de inmediato con su notación *"3"* y no con la clase formada por todos los conjuntos que contienen tres elementos, o con un conjunto concreto de tres elementos.

Abstracción

No hace falta saber demasiadas matemáticas para poder reconocer su carácter abstracto. Los elementos con los que se trabaja en matemáticas corresponden a definiciones de conceptos abstractos, sin necesidad de referencia a objetos concretos del mundo real.

El mismo concepto de número, tal y como ya se ha visto, es un concepto abstracto, con el cual operamos sin preocuparnos de relacionarlo con un conjunto concreto de elementos del mundo en el que vivimos. Lo mismo podemos decir de los conceptos geométricos de punto, línea, triángulo, etc. que aparecen como resultado de la abstracción de una serie de propiedades espaciales y/o dimensionales de los objetos.

En general, a partir de conceptos primitivos vamos desarrollando conceptos más y más complejos. Así, si en una teoría matemática queremos acotar una clase especial de objetos que nos ayude a designar una idea nueva utilizamos las llamadas *definiciones*, que pueden ser expresadas con claridad gracias a la ayuda de la notación simbólica.

Ejemplos:

Un número *par* es aquel que es divisible por 2 (se suponen definidos los conceptos de *"número"*, *"2"*, y *"divisibilidad"*).

Una función $f(x)$ tiene un *máximo relativo* en el punto x_0 si y sólo si el valor de la función en x_0 es mayor o igual que el valor de la función en todo punto x perteneciente a un cierto entorno de x_0 o, dicho de manera simbólica, si $f(x_0) \geq f(x)$ para todo punto x perteneciente a un entorno de x_0 (se deja al lector/a el trabajo de detallar los conceptos sobre los que se asienta esta definición).

La abstracción matemática parte fundamentalmente del estudio de las relaciones cuantitativas y espaciales de los objetos y su forma de desarrollo; en la actualidad, se realiza exclusivamente mediante razonamientos lógicos y/o cálculos.

En un principio, los primeros teoremas partían de problemas precisos y relacionados con cuestiones de índole geométrica o numérica que tenían su origen en problemas actuales de la vida cotidiana. Sin embargo, poco a poco, posteriormente, los problemas y sus métodos de resolución se fueron generalizando y extendiéndose a otros ámbitos distintos de la geometría y la aritmética. Aunque las primeras abstracciones aún guardan algún grado de conexión con elementos de la vida cotidiana, a medida que la matemática se desarrolla, las definiciones que se introducen para designar nuevos conceptos matemáticos aportan, cada vez, un grado mayor de sofisticación y generalización, lo que hace difícil ver su conexión con el mundo en el que vivimos.

Esta característica es compartida, en principio, con el resto de las ciencias, ya que, en general, aunque los modelos con los que se trabaja en ciencia parten de una realidad más o menos cercana que pretenden explicar, su desarrollo necesita tanto de aparato matemático como de una abstracción creciente, lo que hace a veces difícil ver la relación con el mundo real del que se parte. La ciencia, sin embargo, necesita, en algún momento, experimentar y contrastar los resultados obtenidos con la realidad, a diferencia del caso de la matemática.

No obstante, lo anterior no quiere decir que la matemática esté fuera del mundo real; la aplicabilidad de la matemática, sus conceptos y sus métodos es evidente en la mayoría de los campos científicos y de la vida cotidiana. Todas las ciencias hacen uso de sus métodos y resultados y, de hecho, a pesar de su abstracción, muchos de los problemas de los que parte tienen relación con problemas surgidos en la realidad.

Axiomatización

En matemáticas, para demostrar un teorema, normalmente, nos basamos en otras propiedades o teoremas ya demostrados anteriormente, y esto plantea la necesidad de señalar cuáles son esas primeras proposiciones o axiomas a partir de los cuales desarrollamos toda la teoría.

La primera presentación de una teoría axiomática fue debida a Euclides en su obra de los *Elementos* (300 a.C.). Euclides desarrolló toda la geometría a partir de nueve axiomas generales para toda ciencia y cinco postulados o axiomas específicos para la geometría.

Euclides.

Un *axioma* es uno de los principios que se aceptan sin demostración al desarrollar una teoría, por lo que los axiomas caracterizan y definen, de alguna forma, la estructura de la teoría. Así, hablamos de los axiomas de grupo, los axiomas de anillo, los axiomas de la geometría proyectiva, de la geometría afín o de la geometría euclídea, etc.

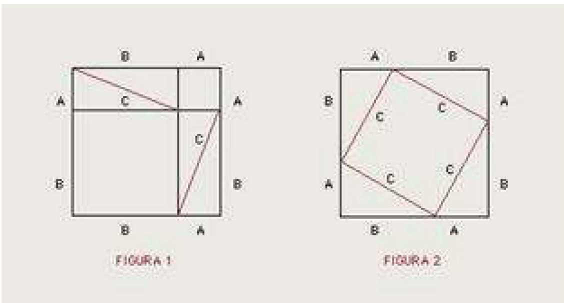
En el siglo XIX, el descubrimiento de las llamadas *geometrías no euclídeas*, que partían de los cuatro primeros postulados propuestos por Euclides y de la negación del quinto, supuso un gran desarrollo del método axiomático como consecuencia del deseo de hacer explícitos y claramente expresados los puntos de partida de las distintas teorías matemáticas, destacando sus rasgos formales en detrimento de demostraciones intuitivas o gráficas. Posteriormente, a partir de finales del siglo XIX, el método axiomático experimentó un nuevo empuje unido, en general, al desarrollo de la lógica formal.

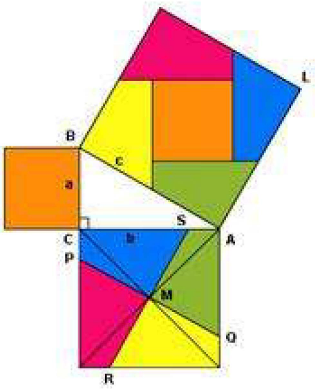
Rigor deductivo

Una *demostración matemática* es el proceso de establecer la verdad de un enunciado de una teoría matemática. Toda demostración matemática lleva consigo un proceso deductivo, y aunque esto está presente en la mente de todo matemático/a, este aspecto de la matemática no se suele enfatizar a la hora de enseñar matemáticas, ni tampoco cuando se trata de demostrar nuevos teoremas.

En la antigüedad, debido principalmente a la falta de notación adecuada para expresar los diferentes conceptos y abstracciones matemáticas y al carácter de los problemas que se planteaban, las demostraciones matemáticas hacían amplio uso de las figuras geométricas, sin las cuales era difícil seguir todos los pasos de una prueba.

Tampoco estaban claramente establecidos los principios de los que se partía, ni se expresaban claramente todos los pasos lógicos que se daban en una demostración. Hoy en día, el uso de figuras geométricas sirve únicamente como ayuda gráfica que permite seguir de una forma más visual e intuitiva el proceso deductivo de la prueba.





Figuras geométricas utilizadas en diferentes demostraciones.

Tampoco se concibe en la actualidad la utilización de métodos experimentales para demostrar un enunciado matemático, como por ejemplo la igualdad de los ángulos de un polígono, mediante la utilización de instrumentos de medida, por muy sofisticados que estos instrumentos sean.

Aunque desde los tiempos antiguos el método de prueba se ha ido refinando hasta alcanzar la forma actual, a raíz de la crisis de fundamentos de la matemática y debido a las paradojas descubiertas en la teoría intuitiva de conjuntos de Cantor, el interés por el método axiomático y por la lógica en general se acrecentó, experimentando los métodos lógicos un desarrollo que no habían tenido durante muchos siglos. Todo esto llevó consigo la necesidad de investigar los elementos utilizados por la lógica, desde símbolos lógicos hasta lenguajes y sistemas formales en general, pasando por relaciones de consecuencia lógica entre enunciados que expresaban propiedades de las distintas teorías matemáticas; en definitiva, se trataba de investigar sobre la forma que debían tener las demostraciones matemáticas.

Hoy es claro que demostrar un teorema matemático es deducirlo, mediante un razonamiento lógico, a partir de propiedades fundamentales de los conceptos que aparecen en el teorema, conceptos y propiedades que se han definido y demostrado previamente mediante su correspondiente deducción lógica a partir de otras propiedades. Así, hasta llegar a los primeros conceptos o axiomas de una teoría. La demostración de un teorema matemático se distingue por su rigor lógico y detalle meticuloso de todos los pasos lógicos dados a partir de las primeras suposiciones.

Tipos de demostraciones matemáticas

Las demostraciones matemáticas, tal y como se ha dicho anteriormente, tratan de probar la verdad de enunciados matemáticos. Estos enunciados a demostrar se suelen denominar lemas, teoremas o corolarios. Un *lema* es un resultado preliminar que se suele utilizar como resultado previo para demostrar un resultado de mayor importancia, o *teorema*. Un *corolario* es una consecuencia de un teorema.

La forma básica o más habitual de una demostración matemática está expresada mediante un condicional que liga dos enunciados que actúan a modo de premisa y conclusión. Simbólicamente, en el lenguaje de la lógica proposicional, tendría la forma *"$p \rightarrow q$"*, es decir, si *"p"* entonces *"q"*, expresión que será falsa solamente en el caso de que la premisa sea verdadera y la conclusión es falsa. Equivalente a esta expresión es la expresión *"$\neg q \rightarrow \neg p$"*, es decir, si no *"$q$"*, entonces no *"$p$"*, forma en la que se basa uno de los métodos de demostración matemáticos que veremos a continuación.

Un tercer tipo de demostraciones matemáticas consiste en demostrar la equivalencia entre dos o más tipos de enunciados. En el caso de equivalencia entre dos enunciados, hay que demostrar la verdad de expresiones del tipo *"$p \leftrightarrow q$"*, es decir, *"p"* si y sólo si *"q"*, o bien *"p"* es condición necesaria y suficiente para demostrar *"q"*. En estos casos, la demostración se desarrolla normalmente en dos fases, probando primero la verdad del condicional *"$p \rightarrow q$"* y luego la del recíproco, *"$q \rightarrow p$"*.

Si en un teorema tenemos que demostrar la equivalencia de más de dos enunciados, la demostración suele hacerse de forma circular, demostrando que el segundo enunciado se sigue del primero, el tercero del segundo, etc. para cerrar la cadena demostrando que el primero se sigue del último.

Veamos cuáles son los métodos más habitualmente utilizados en matemáticas para la demostración de teoremas que tienen la forma lógica señalada en los párrafos anteriores.

Demostraciones directas

Si queremos probar *"q"* a partir de *"p''*, normalmente no lo hacemos en un único paso, sino a partir de una cadena de implicaciones que comienzan en *"p"* y terminan en *"q"*. Los pasos intermedios son deducciones que se obtienen a partir de las premisas anteriores y de otros resultados o teoremas demostrados anteriormente, y que de alguna forma son más asequibles o más fáciles de alcanzar a partir de lo que ya conocemos.

Simbólicamente, una prueba de este tipo tendría la siguiente forma:

$$p \rightarrow p_1 \rightarrow p_2 \rightarrow p_3 \rightarrow \ldots \rightarrow p_n \rightarrow q.$$

Este método de demostrar *"q"* a partir de *"p"* mediante una cadena de implicaciones se basa en la propiedad transitiva del condicional, que nos dice que si los condicionales *"$p \rightarrow p'$ "* y *"$p' \rightarrow p''$ "* son verdaderos, entonces el condicional *"$p \rightarrow p''$ "* también lo es.

Este tipo de pruebas tiene la dificultad añadida de tener que elegir, de entre todas las posibles implicaciones que se deducen de una premisa, la que resulta más adecuada en cada caso para completar la cadena que nos lleva de *"p"* a *"q"*.

Demostraciones por contradicción

En ocasiones, demostrar *"q"* a partir de *"p"* de una forma directa presenta dificultades, porque el enunciado representado por *"p"* no es fácil de manejar, y en consecuencia resulta difícil obtener deducciones a partir de él. En estos casos, la prueba se puede simplificar si partimos de suponer la negación de la conclusión, *"q"*, para demostrar que *"p"* no se verifica. Nos basamos para ello en la equivalencia de las expresiones *"$p \rightarrow q$"* y *"$\neg q \rightarrow \neg p$"*.

Veamos un ejemplo:

Si el cuadrado de un número entero n es impar, entonces n es impar.

Si partimos directamente de suponer que n^2 es impar, es decir, que n^2 es igual a un número par más 1, y queremos demostrar que n es impar, tendríamos que calcular la raíz cuadrada de la expresión que nos representa a n^2, lo que no nos lleva fácilmente a la conclusión. Sin embargo, razonando por contradicción, suponemos que n no es impar, es decir, que n es par; tenemos entonces que n es múltiplo de 2, luego $n = 2p$. Calculamos el cuadrado de n y resulta $n^2 = 4p^2 = 2(2p^2)$; por tanto, n^2 es par, luego se verifica la negación de la premisa.

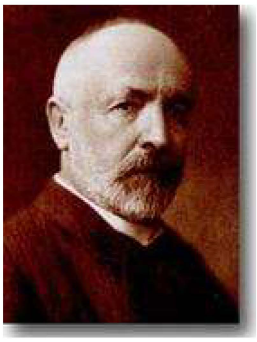
Demostraciones por reducción al absurdo

Este tipo de demostraciones es en realidad una variante del método anterior. Suponemos que *"p"* se cumple, pero que la conclusión no, es decir, que *"q"* es falsa. A partir de estas suposiciones vamos haciendo deducciones hasta encontrar una contradicción o un absurdo, lo cual nos demuestra que si *"p"* se cumple, no es posible que *"q"* sea falsa.

Veamos un ejemplo algo más complicado que el presentado en el apartado anterior, mediante el que se demuestra que hay diferentes tipos de infinitos; en concreto, que el número infinito que representa al total de los números reales es mayor que el representa a los naturales.

> Demostrar que el conjunto de números reales entre 0 y 1 y, en consecuencia, el conjunto de los números reales, no es numerable[1].

G. Cantor utilizó el método de reducción al absurdo para demostrar este teorema. Supuso que el conjunto de los números reales entre 0 y 1 era numerable, es decir, que todos los números reales entre 0 y 1 se podían colocar como los números naturales en una lista ordenada. Por ejemplo:



George Cantor.

$$\begin{array}{l}
0\,.[d_{11}]\, d_{12}\, d_{13}\, d_{14}\, d_{15}\, d_{16}\, d_{17}\, d_{18}\, d_{19}\ldots \\
0\,.d_{21}\, [d_{22}]\, d_{23}\, d_{24}\, d_{25}\, d_{26}\, d_{27}\, d_{28}\, d_{29}\ldots \\
0\,.d_{31}\, d_{32}\, [d_{33}]\, d_{34}\, d_{35}\, d_{36}\, d_{37}\, d_{38}\, d_{39}\ldots \\
0\,.d_{41}\, d_{42}\, d_{43}\, [d_{44}]\, d_{45}\, d_{46}\, d_{47}\, d_{48}\, d_{49}\ldots \\
0\,.\, d_{51} d_{52}\, d_{53}\, d_{54}\, [d_{55}]\, d_{56}\, d_{57}\, d_{58}\, d_{59}\ldots \\
0\,.\, d_{61} d_{62}\, d_{63}\, d_{64}\, d_{65}\, [d_{66}]\, d_{67}\, d_{68}\, d_{69}\ldots \\
0\,.\, d_{71} d_{72}\, d_{73}\, d_{74}\, d_{75}\, d_{76}\, [d_{77}]\, d_{78}\, d_{79}\ldots \\
0\,.\, d_{81} d_{82}\, d_{83}\, d_{84}\, d_{85}\, d_{86}\, d_{87}\, [d_{88}]\, d_{89}\ldots \\
\qquad\qquad\qquad\vdots
\end{array}$$

Si de la diagonal tomamos elementos diferentes a los que están entre corchetes obtendremos un número real diferente a los dados en la lista, lo que es contradictorio, ya que el número así obtenido es real y está entre 0 y 1 . Por tanto, es un error suponer que es posible colocar todos los números reales entre 0 y 1 en una lista, de donde se deduce el teorema.

Citemos a continuación dos tipos de demostraciones matemáticas cuya forma no se puede simbolizar en el lenguaje básico de la lógica proposicional, sino que exige el paso a un lenguaje lógico más expresivo como el de la lógica de primer orden. En este lenguaje se pueden utilizar expresiones del tipo *"existe un x"*, o *"para todo elemento x"*, tal que cumple la propiedad P.

Demostraciones de existencia

Mediante estas demostraciones se trata de probar expresiones del tipo

Demostrar que existe un x tal que cumple la propiedad P.

Para demostrar la existencia de un elemento, en ocasiones, se utiliza un tipo de demostración *constructiva* que muestra de una manera efectiva cómo se puede hallar o calcular dicho elemento.

Otras veces, sin embargo, la demostración se limita a probar la posibilidad de existencia de ese elemento, sin mostrar la forma de calcularlo. Este segundo tipo de demostraciones, habituales en la práctica matemática ordinaria, es sin embargo rechazada por la corriente intuicionista o constructivista que, liderada por L.E.J. Brouwer, constituyó uno de las líneas de desarrollo de la matemática que surgieron a partir de la crisis de fundamentos de finales del siglo XIX.

Ejemplo:

Si a y b son dos números reales y $a < b$, existe un número real c tal que $a < c < b$.

Si hacemos $c = \dfrac{a+b}{2}$ se ve fácilmente que el número así construido cumple las condiciones del teorema, con lo que éste queda demostrado.

Demostraciones de unicidad

Vinculadas a las demostraciones de existencia están las llamadas demostraciones de *unicidad*, mediante las cuales se trata de probar expresiones del tipo

Demostrar que si existe un x que cumple la propiedad P, este x es único.

Para demostrarlas se suele partir de la suposición de existencia de más de uno de dichos elementos, para probar, finalmente, que esos elementos son iguales.

Ejemplo:

Demostrar que la solución de la ecuación $2x + 3 = 7$ es única.

Supongamos que esta ecuación tiene dos soluciones, x_1 y x_2. Como son soluciones de la ecuación, si las sustituimos en ella, la igualdad se verificará, es decir, $2x_1 + 3 = 7$, $2x_2 + 3 = 7$, de donde $2x_1 + 3 = 2x_2 + 3$ y, por tanto, $x_1 = x_2$.

Demostraciones por inducción matemática

A pesar de lo que su nombre pueda indicar, este tipo de demostraciones no son pruebas inductivas, sino que utilizan el método deductivo para demostrar teoremas a partir del *axioma de la buena ordenación*, que asume que *"todo conjunto puede ser bien ordenado" ;* [2]. Se reconvierte así el método inductivo de verificación uno por uno de una propiedad para todos los elementos de un conjunto, introduciéndolo como axioma de la teoría de conjuntos. Utilizaremos aquí una versión débil del axioma, que dice que *"todo subconjunto de un conjunto numerable puede ser bien ordenado"* .

Partiendo de este axioma se demuestra el *principio de inducción matemática*, cuyo enunciado es el siguiente:

> Sea P una propiedad aplicable al conjunto de los números naturales (o, en general, a los elementos de un conjunto numerable). Si se cumplen las siguientes condiciones:
>
> i) *La propiedad se verifica para el elemento 0, es decir, $P(0)$ es verdadera.*
> ii) *Siempre que $P(m)$ es verdadera, $P(m+1)$ es verdadera.*
>
> *Entonces P se verifica para todo elemento n del conjunto de los números naturales.*

Tal y como se ha indicado, mediante este principio podemos probar propiedades de los números naturales sin tener que verificar la propiedad para cada elemento, uno a uno.

Ejemplo:

Demostrar que la suma de los n primeros números naturales es igual a $\frac{n(n+1)}{2}$.

Sea $P(n) = 0 +1+2+....+n$. Comprobemos que para esta propiedad de los números naturales se cumplen las condiciones i) y ii) del principio de inducción finita:

i) $P(0) = \frac{0 \cdot 1}{2} = 0$, se cumple.

ii) Supongamos que $P(m)$ es verdadera y veamos que, en este caso, $P(m+1)$ también lo es:

$$P(m+1) = 0+1+2+....+m+(m+1).$$

Aplicando la hipótesis de inducción que nos dice que $P(m)$ es verdadera, sabemos que $0+1+2+....+m = \frac{m(m+1)}{2}$. Sustituyendo esta igualdad en la expresión $P(m+1)$ tenemos:

$$P(m+1) = \frac{m(m+1)}{2} + (m+1) = \frac{m(m+1)+2(m+1)}{2} = \frac{(m+1)(m+2)}{2},$$

tal y como queríamos demostrar.

Como se cumplen las condiciones i) y ii), el principio de inducción nos dice que la propiedad se verifica para todo número natural n, y en consecuencia el teorema queda demostrado.

Para terminar, diremos brevemente que si en vez de probar una propiedad general para todos los elementos de un conjunto, sea mediante el principio de inducción o mediante cualquier otro método, lo que queremos es demostrar que dicha propiedad no se cumple, el método más utilizado suele ser el de mostrar un *contraejemplo*, es decir, exhibir un elemento de dicho conjunto o clase que no verifica la propiedad.

Hemos citado brevemente lo que, a nuestro entender, son aspectos generales y comunes de la matemática y de su método en general. Sin embargo, creemos que a la hora de evaluar los desarrollos matemáticos hay también otros puntos, que no hemos podido exponer, pero que siempre hay que tener en cuenta en una demostración; por ejemplo, si los conceptos definidos son provechosos, es decir, si son útiles en el desarrollo de una teoría; si los métodos empleados en la demostración son de aplicación general; si el teorema tiene aplicaciones; si la demostración es o no constructiva; etc. Dicho de otra forma, además de probar que el teorema es verdadero, deberíamos tener en cuenta, también, qué nos enseña su demostración.

Por otra parte, nos gustaría remarcar asimismo que a la hora de presentar las matemáticas habría que valorar si sería útil enseñar no sólo el producto final y perfecto de una demostración acabada, sino los esfuerzos empleados para llegar a dicho resultado, los caminos erróneos recorridos, los días pasados sin avance aparente, los resultados colaterales conseguidos, etc. Creo, sinceramente, que dedicar algún tiempo a esta tarea conseguiría acercar la matemática a más gente, y contribuiría a destruir el mito de ?torre inaccesible? que presenta para muchos/as.

Referencias

A.D. Aleksandrov, A.N. Kolmogorov, M.A. Laurentiev y otros: *La matemática: su contenido, métodos y significado* (3 vols., 11ª. ed.). Alianza, Madrid, 2003.

C. Badesa, I. Jané, R. Jansana: *Elementos de lógica formal.* Ariel, Barcelona, 1998.

I.M. Copi, C. Cohen: *Introduction to logic* (12ª. ed.). Pearson-Prentice Hall, New York, 2001. [Traducción al castellano de una edición anterior: I.M. Copi, C. Cohen: *Introducción a la lógica.* Limusa, México, 2000].

R. Courant, H. Robbins: *What is mathematics?: An elementary approach to ideas and methods* (2ª. ed.) Oxford University Press, Oxford, 1996. [Traducción al castellano: *¿Qué es la matemática?: Una exposición elemental de sus ideas y métodos.* Aguilar, Madrid, 1971].

P.J. Davis, R. Hersh: *The mathematical experience.* Houghton Mifflin Company, Boston, 1981. [Traducción al castellano: *Experiencia matemática*. Labor, Barcelona, 1988].

A. Deaño: *Introducción a la lógica formal* (4ª. ed.). Alianza, Madrid, 1983.

M. Garrido: *Lógica simbólica* (3ª. ed.). Tecnos, Madrid, 1995.

I. Lakatos, J. Worral, E. Zahar (eds.): *Proofs and Refutations: The Logic of Mathematics Discovery*. Cambridge University Press, Cambridge, 1976. [Traducción al castellano de C. Solís: *Pruebas y refutaciones: la lógica del descubrimiento matemático.* Alianza Universidad, Madrid, 1986].

P. Mancosu, K.F. Jörgensen, S.A. Pedersen (eds.): *Visualization, Explanation and Reasoning Styles in Mathematics*. Synthese Library, vol. 327. Springer, Dordrecht, 2005.

---

[1] Un conjunto es *numerable* si, y sólo si, tiene el mismo cardinal que el conjunto de los números naturales. Dicho de una forma rápida, si tiene el mismo "número" de elementos que el conjunto de los números naturales.

[2] Un conjunto está *bien ordenado* si todo subconjunto suyo tiene un *primer elemento* o *mínimo*. El conjunto de los números reales con el orden habitual, <, no está bien ordenado. Este axioma asume que se puede encontrar una buena ordenación para los reales; sin embargo, nadie ha encontrado esa buena ordenación. Este axioma es equivalente a otros resultados utilizados bastante habitualmente en la práctica matemática.

Sobre la autora

Begoña Carrascal Platas es doctora en Matemáticas por la Universidad del País Vasco-Euskal Herriko Unibertsitatea, y profesora titular del Departamento de Lógica y Filosofía de la Ciencia de la misma Universidad. Imparte clases de Lógica Formal, Matemáticas y Pragmática del Lenguaje Natural en la Licenciatura de Filosofía. Sus líneas de investigación están relacionadas con las asignaturas que imparte, y también con las teorías de argumentación en lenguaje natural y falacias argumentativas.