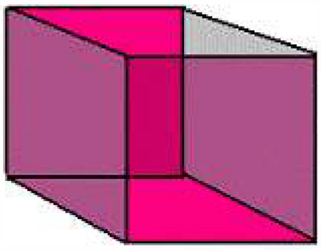
Recibido: jueves, 13 diciembre 2007

pasatiempos ::
matematicalia
revista digital de divulgación matemática
Vol. 3, nos. 4-5 (oct.-dic. 2007)

¿Qué pasaría si... (*)

Pinche sobre una fórmula para ampliarla. Vuelva a pinchar sobre ella para reducirla, o pinche manteniendo pulsada la tecla [shift] para reducir todas las que permanezcan ampliadas.

... cortáramos un cubo con un plano? ¿Podríamos obtener un triángulo semejante a cualquier triángulo dado?



[La solución, en el próximo número]

Solución al problema anterior

... nos preguntáramos si habrá un número menor que 2 que también sea estrictamente mayor que todos los números a_n en nuestra "torre exponencial" de junio? ¿Existirá tal número?

Respuesta: No, no hay ningún número menor que 2 con esa propiedad. Esta es una afirmación bastante profunda, que para ser probada con todo rigor requeriría una buena dosis de matemática. Vamos a intentar dar una idea lo más intuitiva posible, saltándonos algo del rigor.

Comencemos por recordar que habíamos formado la torre exponencial empezando con $a_1 = \sqrt{2}$ y definiendo $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$. Usando el Principio de Inducción, probamos que todos los números así formados son < 2. Por otra parte, los valores aproximados que obtuvimos para a_1,..., a_{31} parecen indicar que los números crecen con n. En efecto, podríamos volver a usar el Principio de Inducción para demostrar que $a_n < a_{n+1}$ para todo $n = 1, 2, 3, \dots$.

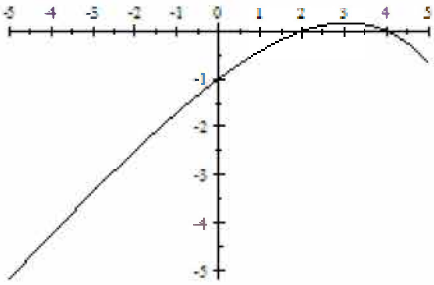
Tenemos entonces una familia infinita de números a_n que crecen con n pero se mantienen por debajo de un número fijo, en este caso 2. Si imaginamos a los números a_n desplegados a lo largo de una recta, parece bastante intuitivo el pensar que tiene que haber un número no superior a 2 y mayor que todos los a_n, hacia donde estos números convergen. Esta idea se basa en el llamado *Axioma de Completitud* de los números reales, que en términos informales dice que no hay "agujeros" en la recta, en el sentido de que cada punto corresponde a un número real. Puedes leer una presentación cuidadosa de estas ideas en http://ific.uv.es/mathepth/es/apuntes/metodosII.pdf.

En términos matemáticos, no sólo tiene que haber un número, llamémoslo L, tal que $a_n \leq L$ para todo n, sino que, además, para cada número $M < L$ debe de haber un valor N del subíndice n tal que $M \leq a_n \leq L$ para $n \geq N$. Aparece aquí la idea de límite de los números a_n, cuando n va a infinito.

Entonces, volviendo a leer la pregunta que hemos contestado negativamente, veremos que nuestra respuesta quedará justificada si mostramos que L es en nuestro caso 2.

Es posible demostrar que tomando el límite cuando n va a infinito en la relación $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$, el número L cuya existencia hemos establecido debe verificar la relación $L = \sqrt{2}^{L}$.

El gráfico de la función $f(L) = L - \sqrt{2}^{L}$:

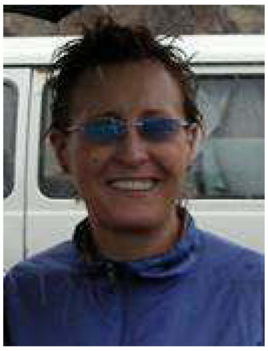


parece indicar que $f(L) = 0$ cuando $L = 2, 4$. En efecto, $\sqrt{2}^{2} = 2$, y también $\sqrt{2}^{4} = 4$. El valor que estamos buscando no puede ser 4 porque sabemos que $a_n < 2$ para todo $n = 1, 2, 3, \ldots$. Entonces L tiene que ser 2, como queríamos.

Quizá te estés preguntando si todo este argumento es realmente necesario para justificar nuestra respuesta. Parecería que la pregunta, tan simple en apariencia, debería tener una respuesta igualmente sencilla.

Por ejemplo, ¿no podríamos mostrar directamente que para cada número $M < 2$ hay un número a_n que es mayor que M? Esto nos daría una respuesta bien directa. El problema con este enfoque es la definición de los números a_n. No tenemos una fórmula que nos dé el valor de a_n para cada n. Lo único que sabemos es que empezando con $a_1 = \sqrt{2}$, los números a_n se calculan uno después del otro por medio de la fórmula, llamada *de recurrencia*, $a_{n+1} = \sqrt{2}^{a_n}$.

Sobre la autora



Josefina (Lolina) Álvarez es Professor of Mathematics en New Mexico State University (USA). Especialista en análisis armónico y funcional, se doctoró en Matemáticas por la Universidad de Buenos Aires (Argentina), bajo la dirección de A.P. Calderón. Ha ocupado diversos puestos y cargos académicos en la Universidad de Buenos Aires y en las estadounidenses de Princeton, Chicago, Florida Atlantic University y New Mexico. Ha sido investigadora del CONICET (Argentina). Miembro de la Unión Matemática Argentina, Mathematical Association of America y American Mathematical Society, formó parte del *Committee on Committees* de esta última entre 1999 y 2002. Ha dictado numerosas conferencias en congresos y sesiones especiales e impartido seminarios en Alemania, Argentina, Bélgica, Brasil, Canadá, Colombia, España, Estados Unidos, México, Perú, Polonia, Suecia y Venezuela. Ha pertenecido y en varias ocasiones presidido los comités organizadores de distintos congresos y minisimposia. Ha ejercido como evaluadora para prestigiosas revistas especializadas. Desde 2002 hasta 2007 ha sido Editora Asociada del *Rocky Mountain Journal of Mathematics*. Autora o coautora de numerosos artículos científicos y varias monografías en análisis armónico y funcional y directora de cinco tesis doctorales, ha desarrollado asimismo una intensa actividad en el campo de la educación matemática, habiendo recibido diversos galardones a la excelencia docente.

matematicalia
revista digital de divulgación matemática

(*) Sección a cargo de Josefina Álvarez.