UTILIZACION DE LOS CUADRADOS MAGICOS EN COU

Por **Antonio Martinón Cejas - Cástor Molina Iglesias**

INTRODUCCION

Uno de los mayores problemas que se le plantean al profesor de una determinada materia, es el de lograr atraer la atención de sus alumnos hacia el tema que explica. Una presentación que comience por una especie de juego, llamativa, diferente, que tenga algo de misteriosa o mágica ,puede ayudar a despertar en el alumno interés por el problema, inquietud y curiosidad por conocer su solución, llevándole a ejercer más ímpetu para superar las dificultades que toda tarea lleva consigo.

En línea con esta idea, se pretende en este trabajo, poner de manifiesto algunos usos didácticos de un tema clásico de la Matemática Recreativa, dentro del marco del Algebra Lineal que se explica en el Curso de Orientación Universitaria (COU).

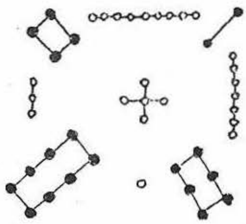
El estudio de los *Cuadrados Mágicos* (CM) nos permitirá hacer uso de nociones como las de subespacio vectorial, base, suma directa de subespacios, entre otras, así como la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y la práctica del cálculo algebraico con matrices; en éste último se insiste mucho y surgen bastantes ejemplos que ilustran el carácter no conmutativo, ni íntegro, del producto de matrices cuadradas.

El desarrollo del tema queda como es natural a criterio de cada profesor, pudiendo ser motivo de un Seminario complementario, ser propuesto a trozos, a medida que se va explicando la materia correspondiente, o incluso como problema de recapitulación para la terminación del Algebra Lineal.

NOTAS HISTORICAS

Un CM consiste en una disposición numérica, en forma de matriz cuadrada, en la que la suma de los elementos por filas, columnas y diagonales coincide. Históricamente, el estudio se limitaba a los números enteros e incluso la suma se consideraba mágica cuando valía $(1/2)n(n^2+1)$, siendo n el orden de la matriz.

Parece ser, que el más antiguo de los CM de que se tiene referencia es de orden 3 y suma 15, como se ve en la figura:



con la tradicional escritura china, de cuerdas y nudos, para los números, y aparece en el CHU KING, el clásico de los documentos chinos, algunos siglos antes de nuestra era.

Las obras de los matemáticos árabes, como Tabit Ibn Qurra y el propio Al Khuwarizn en el s.IX, reflejan que los CM eran ya conocidos por los hindúes y, tal vez basado en esta tradición hindú, hacia el 1300, el matemático bizantino M. Moschopulos escribe el primer tratado conocido sobre los CM.

Ya en el Renaciomiento, el conocimiento de los CM está muy difundido por todo Occidente; a ello tal vez contribuyó, en tanta medida como su carácter recreativo, ese aspecto esotérico e incluso místico que rodeó a los CM a lo largo de su temprana historia. Hay un grabado en cobre del célebre pintor y grabador alemán Alberto Durero, en el que aparece el CM siguiente:

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Los dos números centrales de la cuarta fila indican el año en que fué pintado: 1.514.

En el s. XVI, multitud de matemáticos y estudiosos se dedican en mayor o menor grado a ellos; entre ellos Luca Pacioli y el aritmético M. Stiffel, pero es en el s. XVII cuando aparece la obra sin duda más importante de todas cuantas la precedieron-:«*Problèmes plaisons et dèlectables, qui se font par les nombres*» de Cl. G. Bachet de Mèziriac, dedicada a los CM de orden impar.

También en el s. XVIII inicia Fermat una correspondencia con el aritmético B. Frenicle, y en ella da la regla para la construcción de cuadrados mágicos que conservan su propiedad después de haberles suprimido su contorno formado por la filas y columnas exteriores, como el representado en la figura:

2	11	12	13	77	78	79	81	16
6	18	27	26	61	62	65	28	76
7	59	30	35	51	53	36	23	75
8	58	32	38	45	40	50	24	74
73	57	49	43	41	39	33	25	9
72	22	48	42	37	44	34	60	10
68	19	46	47	31	29	52	63	14
67	54	55	56	21	20	17	64	15
66	71	70	69	5	4	3	1	80

También se tiene referencia de estudios sobre CM, no conservados, realizados por B. Pascal.

En el siglo XVIII, también se ocupa L. Euler del tema y a él se debe precisamente un cuadrado de orden 8 y suma 260, en el que la suma de filas y columnas coincide, pero no con la de las diagonales, y que tiene la sorprendente propiedad de que puede recorrerse desde el número 1 al 64 a salto de caballo de ajedrez:

1	48	31	50	33	16	63	18
30	51	46	3	62	19	14	35
47	2	49	32	15	34	17	64
52	29	4	45	20	61	36	13
5	44	25	56	9	40	21	60
28	53	8	41	24	57	12	37
43	6	55	26	39	10	59	22
54	27	42	7	58	23	38	11

Mientras que unos como A. Cayley, en el s. XIX, consideraban el estudio de los CM no sólo como divertimento sino como cosa digna de dedicarles uno su esfuerzo, otros como el célebre inventor y político norteamericano B. Franklin, se quejaron de haber gastado parte de su juventud en el estudio de este tema, lo que le impidió dedicarse a asuntos de más provecho.

EL ESPACIO VECTORIAL DE LOS CUADRADOS MAGICOS DE ORDEN TRES

3.1) Una matriz real

$$M = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

se llama un*cuadrado mágico* (CM) de *orden* 3 y *suma* s, si la suma de sus elementos por filas columnas y diagonales es *s*.
3.2) Se demuestra sin dificultad que si M es un CM de suma s y M' es un CM de suma s', entonces M+M' es un CM de suma s+s'.

Análogamente se prueba que si M es un CM de suma s y p es un número real, entonces pM es un CM de suma ps.

Por lo tanto, el conjunto de los CM de orden 3, constituye un subespacio $\mathcal{C}$, del espacio vectorial real 9-dimensional $\mathfrak{M}_{3x3}$ de las matrices reales cuadradas de orden 3.

La aplicación definida en $\mathcal{C}$ y que toma valores en R, que asigna a cada CM su suma es una forma lineal (la conocida *traza* de la matriz).
3.3) Sea M, como en (1.1), un CM de suma s. aplicando la definición obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccccc}
a & + & b & + & c & & & & & & & & & & & & & = & s \\
 & & & & & & d & + & e & + & f & & & & & & & = & s \\
 & & & & & & & & & & & & g & + & h & + & i & = & s \\
a & & & & & + & d & & & & & + & g & & & & & = & s \\
 & & b & & & & & + & e & & & & & + & h & & & = & s \\
 & & & & c & & & & & + & f & & & & & + & i & = & s \\
a & & & & & & & + & e & & & & & & & + & i & = & s \\
 & & & & c & & & + & e & & & + & g & & & & & = & s
\end{array}$$

Utilizando el método de eliminación de Gauss, obtenemos lo siguiente:

$$
\begin{array}{l}
a + b + c = s \\
b + e + h = s \\
c + f + i = s \\
d + e + f = s \\
e - f + g - i = s \\
3f - 2g + h + 4i = 2s \\
g + h + i = s
\end{array}
$$

Utilizando como parámetros s,h,i obtenemos, sustituyendo ya en M:

$$
M = \begin{bmatrix} \frac{2s}{3} - i & \frac{2s}{3} - h & \frac{-s}{3} + h + i \\ \frac{-2s}{3} + h + 2i & \frac{s}{3} & \frac{4s}{3} - h - 2i \\ s - h - i & h & i \end{bmatrix}
$$

Observemos que *el elemento central*, e, *es un tercio de la suma del CM*. Esto nos sugiere un cambio de parámetros para obtener una expresión más sencilla y simétrica para M.

3.4) M puede escribirse así:

$$
M = \begin{bmatrix} x + y & x - y - z & x + z \\ x - y + z & x & x + y - z \\ x - z & x + y + z & x - y \end{bmatrix}
$$

siendo $x = s/3$; $y = (s/3) - i$; $z = (-2s/3) + h + i$,
o bién: $s = 3x$; $i = x - y$; $h = x + y + z$.

De ello resulta esta nueva expresión para M:

$M = xA + yB + zC$

siendo:

$$
A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}
$$

que son CM de sumas 3,0,0 respectivamente.

Lo anterior prueba que los CM: A,B,C generan el espacio $\mathcal{E}$. Además forman un sistema libre como se comprueba fácilmente.

Por lo tanto, *el espacio Vectorial de los CM de orden 3 es un espacio vectorial de dimensión 3, y una de cuyas bases es la formada por A,B,C.*

3.5) Otro modo de llegar al anterior resultado sería el siguiente:

$$M = \begin{bmatrix} a & b & s-a-b \\ d & e & s-d-e \\ s-a-d & s-b-e & s-a-e \end{bmatrix}$$

y puesto que s-a-e es común a la diagonal principal y a la tercera columna y ambas suman s, resulta:

$$a + e = s\text{-}a\text{-}b + s\text{-}d\text{-}e$$

de donde

$$s = (2a + b + d + 2e)/2.$$

Sustituyendo esta expresión de s *en M, obtenemos:*

$$\begin{bmatrix} a & b & e - \dfrac{d-b}{2} \\ d & e & a - \dfrac{d-b}{2} \\ e - \dfrac{d-b}{2} & a - \dfrac{d-b}{2} & \dfrac{d+b}{2} \end{bmatrix}$$

y así, llamando $x=e$, $y=a-e$, $z=(d-b)/2$, se obtiene la expresión de M ya señalada anteriormente en (3.4).

3.6) El conjunto de los CM de orden 3 y suma nula, constituye un subespacio vectorial $\mathcal{E}^{\circ}$ del espacio vectorial $\mathcal{E}$ de los CM de orden 3.

Para un CM de suma nula se tiene x=0, con lo que B y C forman una base de $\mathcal{E}^{\circ}$ y éste tiene dimensión 2.

Cualquier CM de suma s, puede escribirse como un CM de la forma xA, que tiene suma 3x=s, y de un CM de suma nula. Llamando $\mathcal{A}$ al subespacio engendrado por A, resulta que, al ser nula la intersección de $\mathcal{A}$ y $\mathcal{E}^{\circ}$ es *suma,* de estos dos subespacios, *directa. Podemos escribir pués:*

$$\mathcal{E} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{E}^{\circ}$$

Si $s \neq 0$, el conjunto de los CM de *suma fija* s, no constituye un subespacio vectorial de $\mathcal{E}$

INVERSO. PRODUCTO Y POTENCIAS

4.1) Se vé facilmente que:

$$\det M = 9x\,(z^2 - y^2)\ ;$$

se deduce entonces que M será invertible si y sólo si:

$$x \neq 0 \quad y \quad |z| \neq |y|$$

4.2) Si M es invertible, entonces la inversa de M es:

$$M^{-1} = \frac{1}{3s}\begin{bmatrix} 1-ky & 1+k(y+z) & 1-kz \\ 1+k(y-z) & 1 & 1-k(y-z) \\ 1-kz & 1-k(y+z) & 1+ky \end{bmatrix}$$

siendo $K = 3s^2 : \det M = \dfrac{3x}{z^2-y^2}$ siendo s=3x la suma de M.

Es evidente que, de existir, M^{-1} resulta que también es un CM y que su suma es 1/s.

Concluimos pues, que si M es un CM de suma s y es invertible, su inversa M^{-1} es un CM de suma s^{-1}

Notemos que ni los elementos de $\mathcal{A}$ ni los de $\mathcal{C}$ son en ningún caso invertibles.

Si es invertible

$$M = xA + yB + zC$$

su inversa resulta ser:

$$M^{-1} = \frac{1}{9x}A - \frac{y}{3(z^2-y^2)}B - \frac{z}{3(z^2-y^2)}C$$

4.3) Estudiemos ahora las condiciones bajo las cuales el producto de dos CM es un CM.

Sean

$$M = xA + yB + zC$$
$$M' = x'A + y'B + z'C$$

resulta entonces que:

$$A^2 = 3A \qquad B^2 = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix} = E$$

$$C^2 = -B^2 = -E$$

$$AB = BA = AC = CA = 0$$

$$BC = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 \end{bmatrix} = D$$

$$CB = -BC = -D$$

de donde se obtiene enseguida multiplicando las dos expresiones de arriba para M y'M, que:

$$M.M' = 3xx'A + (yy'-zz')E + (yz'-zy')D$$

Llamando para abreviar p,q a los coeficientes de E,D (respectivamente) en esta expresión de arriba, y teniendo en cuenta que, al ser 3xx'A un CM, el que M.M' sea un CM equivale a que lo sea la suma de los dos últimos sumandos:

$$pE + qD = \begin{bmatrix} 2p-q & -p-q & -p+2q \\ -p-q & 2p+2q & -p-q \\ -p+2q & -p-q & 2p-q \end{bmatrix}$$

Exigiendo que las sumas de las diagonales coincidan con las de las filas y columnas (que valen cero), obtenemos:

$$p = yy' - zz' = 0$$
$$q = yz' - zy' = 0$$

o equivalente

$$(y-z)(y'+z') = 0$$
$$(y+z)(y'-z') = 0$$

Distingamos dos casos:

-(a) Si $yy' = 0$ entonces M o M' es de la forma xA o x'A, respectivamente, como se deduce enseguida de las relaciones de arriba.
-(b) Si $yy' \neq 0$, se dedude que o bién $M = xA + y(B+C)$, $M' = x'A + y'(B+C)$, o bién $M = xA + y(B-C)$, $M' = x'A + y'(B-C)$.

Si efectivamente M.M' es un CM, en cualquier caso se tiene que:

$$M.M' = 3xx'A$$

de donde se deduce que siendo *s* la suma de M, *s'* la suma de M' y *s''* la suma de M.M',

$$s'' = 3(3xx') = (3x)(3x') = s.s'$$

Concluimos pues, afirmando, que para que el producto de dos CM, M y M', sea a su vez un CM es necesario y suficiente que, o bién M o M' sean múltiplos de A, o bién ambos son combinación lineal de A y B+C, o bién ambos son combinación lineal de A y B-C. En cualquiera de estos casos, *el producto es múltiplo de A y la suma del producto es el producto de las sumas.*

4.4) Estudiemos las condiciones que ha de reunir una matriz

$$T = \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$$

para que al multiplicarla por un CM *arbitrario* se obtenga un CM en todos los casos.

Calculando T.M e imponiendo las condicones de que las sumas de filas, columnas y diagonales sean iguales y que M es arbitrario, se demuestra que T ha de ser de la forma:

$$T = \begin{bmatrix} p+r & p & p+q \\ p & p+q+r & p \\ p+q & p & p+r \end{bmatrix}$$

Insistimos en que una matriz T, que al multiplicarla a la izquierda por un CM cualquiera da un CM, ha de ser de la forma anterior, pero que hay matrices que al multiplicarlas por algún CM (no por todos) a la izquierda da un CM y no necesariamente es de la forma anterior.

Si un CM se multiplica a la derecha por una matriz T, para que el producto M.T sea, cualquiera que sea M, un cuadrado mágico, es necesario y suficiente que lo sea su traspuesta:

$$(M.T)^t = T^t.M^t$$

y como M es arbitrario y M^t es un CM, se deduce que T^t ha de ser de la forma descrita anteriormente; pero como T es simétrica $T = T^t$, resulta que las matrices que al multiplicar a la izquierda por un CM arbitrario son las mismas que al multiplicar a la derecha.

4.5) Denotemos por $\mathcal{T}$ el conjunto de las matrices T estudiadas en (4.4), que constituye un subespacio vectorial tridimensional de $\mathfrak{M}_{3x3}$ y una de cuyas bases es la formada por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad J = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T = p\,A + q\,J + r\,I$$

Obsérvese que ni J ni I son CM, y que la matriz identidad pertenece obviamente a $\mathcal{T}$.

Está claro que la intersección de los subespacios $\mathcal{T}$ y $\mathcal{C}$ es $\mathcal{A}$, el subespacio engendrado por A. Por lo tanto, los únicos CM que al multiplicarlos por cualquier otro dan un CM son los de la forma xA, resultado al que habiamos llegado en (4.3).

4.6) Sean $T = pA + qJ + rI$ y $T' = p'A + q'J + r'I$.

Como $A^2 = 3A$; $J^2 = I$; $I^2 = I$

$AJ = JA = A$; $AI = IA = A$; $JI = IJ = J$

se tiene que

$TT' = (3pp' + pr' + pq' + p'r + p'q)A + (qr' + q'r)J + (qq' + rr')I$

y por lo tanto $TT' \in \mathcal{T}$.

Así $\mathcal{T}$ es un *subanillo conmutativo y unitario* de $\mathfrak{M}_{3x3}$; $\mathcal{A}$ es un ideal bilátero de este anillo.

4.7) Estudiemos ahora las potencias de un CM y en que condiciones esas potencias son a su vez cuadrados mágicos .

SeaM = $xA + yB + zC$;

llamando $R = yB + zC$, resulta que, para n = 1,2,3,..

$$M^n = (xA + R)^n$$

Al desarrollar obtendremos sumandos con potencias de A, de R y productos de A y R.

4.8) Se prueba facilmente por inducción que las potencias de A vienen dadas por

$$A^n = 3^{n-1}A$$

4.9) Las primeras potencias de R son

$$R^2 = R.R = (y^2-z^2)E$$

donde $E = B^2$, como se señaló en (4.3).
Resulta entonces que

$$R^3 = R.R^2 = (y^2-z^2)ER$$

y como $ER = RE = 3R$, obtenemos

$$R^3 = 3(y^2-z^2)R$$

Por inducción puede probarse que:

$$R^{2n+1} = 3^n(y^2-z^2)^n R \quad (n=0,1,2,3,...)$$
$$R^{2n} = 3^{n-1}(y^2-z^2)^n E \quad (n=1,2,3,...)$$

4.10) Como señalamos en (4.3), se tiene que:

$$AB = BA = AC = CA = 0$$

de donde se deduce que

$$AR = RA = 0$$

4.11) Ya que los productos de A y R son nulos, como acaba de señalarse, tenemos que

$$M^n = x^n A^n + R^n$$

Utilizando los resultados de (4.8) y (4.9), obtenemos

$$M^{2n+1} = 3^{2n} x^{2n+1} A + 3^n(y^2-z^2)^n R \quad (n=0,1,2,...)$$
$$M^{2n} = 3^{2n-1} x^{2n} A + 3^{n-1}(y^2-z^2)^n E \quad (n=1,2,3,...)$$

Ambas fórmulas pueden resumirse en una sola

$$M^n = 3^{n-1} \times^n A + 3^{\frac{n-2+i(n)}{2}} \left(y^2 - z^2\right)^{\frac{n-i(n)}{2}} R^{i(n)} E^{1-i(n)}$$

siendo $i(n) = [1-(-1)^n]/2 = \begin{cases} 0 \text{ si n es par} \\ 1 \text{ si n es impar} \end{cases}$

Resulta entonces que *si M es un CM y n es impar,* entonces

$$M^n$$

también es un CM, ya que A y R lo son.
Si M es un CM con $y^2 \neq z^2$ y n es par entonces M^n no es un CM, ya que E no lo es.

4.12) Al multiplicar entre si las matrices

$$B, C, D=BC, E=B^2$$

obtenemos los sisguientes resultados que se recogen en la tabla

	B	C	D	E
B	E	D	3C	3B
C	-D	-E	3B	3C
D	-3C	-3B	3E	3D
E	3B	3C	3D	3E

Esta tabla nos sugiere introducir una relación de equivalencia entre matrices de modo que

$$X \sim Y \text{ si y solo si existe } t \neq 0 \text{ tal que } Y = tX.$$

Designando las clases de equivalencia por los propios B,C,D,E se obtiene la tabla:

	E	B	C	D
E	E	B	C	D
B	B	E	D	C
C	C	D	E	B
D	D	C	B	E

que corresponde al Grupo del Rectángulo de Félix Klein.

CUADRADOS MAGICOS NATURALES

5.1) Un cuadrado mágico en el que todos los elementos que aparecen en él son números naturales (excluimos el cero) lo denominaremos *cuadrado mágico natural* (CMN).

5.2) Para que los elementos del CMN

$$M = xA + yB + zC$$

sean naturales es preciso que lo sea x (esto es, la suma ha de ser múltiplo de 3), y además que:

$$x > |y| + |z|$$

5.3) Un problema clásico consiste en colocar los nueve primeros números naturales de forma que constituyan un CM de orden 3.

Como la suma 1+2+3+..+9 es 45, la suma s del CM ha de ser 15 con lo que x=5.

Las posibilidades para y,z son las siguientes:

-a) y.z = 0
-b)y.z ≠ 0 . Caben a su vez seis subcasos:

(1) $y=\pm 1;\quad z=\pm 1$
(2) $y=\pm 1;\quad z=\pm 2$
(3) $y=\pm 1;\quad z=\pm 3$
(4) $y=\pm 2;\quad z=\pm 1$
(5) $y=\pm 2;\quad z=\pm 2$
(6) $y=\pm 3;\quad z=\pm 1$

Solo las soluciones b.3) y b.6) dan lugar a un CM en el que aparezcan los nueve primeros números naturales, pues en las otras se repiten elementos.

Las soluciones al problema son los ocho CM siguientes:

$$\begin{pmatrix} 6 & 1 & 8 \\ 7 & 5 & 3 \\ 2 & 9 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 3 & 8 \\ 9 & 5 & 1 \\ 2 & 7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 7 & 2 \\ 1 & 5 & 9 \\ 8 & 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 9 & 2 \\ 3 & 5 & 7 \\ 8 & 1 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 1 & 6 \\ 3 & 5 & 7 \\ 4 & 9 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 & 3 & 4 \\ 1 & 5 & 9 \\ 6 & 7 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 7 & 6 \\ 9 & 5 & 1 \\ 4 & 3 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 9 & 4 \\ 7 & 5 & 3 \\ 6 & 1 & 8 \end{pmatrix}$$

5.4) Los cuadrados del tipo

$$\begin{pmatrix} c & a & b \\ a & b & c \\ b & c & a \end{pmatrix} \quad y \quad \begin{pmatrix} b & a & c \\ c & b & a \\ a & c & b \end{pmatrix}$$

sólo son mágicos si y sólo si 3b = a+b+c, esto es, 2b = a+c.

En este caso la suma de dos cuadrados de este tipo también lo es.

Así es mágica la suma:

$$\begin{pmatrix} 30 & 10 & 20 \\ 10 & 20 & 30 \\ 20 & 30 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 32 & 11 & 23 \\ 13 & 22 & 31 \\ 21 & 33 & 12 \end{pmatrix}$$

Consideramos los números de ésta matriz como pares ordenados ij donde i=indice fila, j=índice columna, entonces si

$$\begin{matrix}1&2&3\\4&5&6\\7&8&9\end{matrix} \quad \text{se colocan en los lugares} \quad \begin{matrix}32&11&23\\13&22&31\\21&33&12\end{matrix}$$

respectivamente, se obtiene el CM último de la lista 5.3).

Si sumamos al CM

$$\begin{bmatrix}2&9&4\\7&5&3\\6&1&8\end{bmatrix}$$

el CM, nA, donde n es cualquier número natural, se obtiene el CM

$$\begin{bmatrix}n+2&n+9&n+4\\n+7&n+5&n+3\\n+6&n+1&n+8\end{bmatrix}$$

formado por cualesquiera nueve números naturales consecutivos, que tiene de suma $3n + 15$.

CUADRADOS MAGICOS DE ORDEN SUPERIOR

6.1) Una matriz cuadrada nxn en la que la suma de sus elementos por filas, columnas y diagonales es *s*, la denominaremos un *CM de orden n* y *suma s.*

Denotaremos por $\mathcal{C}_n$ el conjunto de los CM de orden n.

Se demuestra enseguida que $\mathcal{C}_n$ es un subespacio vectorial del espacio vectorial de las matrices cuadradas reales de orden n, $\mathcal{M}_{nxn}$.

El conjunto $\mathcal{C}^\circ_n$ de los CM de orden n y suma nula es un subespacio vectorial de $\mathcal{C}_n$. Si denotamos por $\mathcal{A}_n$ el subespacio engendrado por la matriz A (que tiene todos sus lementos 1), entonces, igual que para n=3, se obtiene que:

$$\mathcal{C}_n = \mathcal{A}_n \oplus \mathcal{C}^o_n$$

Un CM de orden n dependerá de n^2 -2n parámetros, ya que hay, contando la suma s, 2n + 1 ecuaciones y $n^2 + 1$ incógnitas (aparentemente debian haber 2n+2 ecuaciones pero ocurre que una de las ecuaciones es dependiente linealmente de las demás, ya que si todas las columnas y n-1 de las filas suman s, también la fila restante ha de sumar s). Por lo tanto:

$$\dim \mathcal{C}_n = n^2 - 1$$

6.2) Para ver de que forma es un CM de orden 4, podemos estudiar primeramente el caso de suma nula y luego sumarle la matriz $\frac{s}{4} \cdot A$

6.3) Sin recurrir al sistema de ecuaciones podemos escribir, para un CM de suma nula,

$$\begin{pmatrix} a & b & c & -a-b-c \\ d & e & f & -d-e-f \\ g & h & i & -g-h-i \\ -a-d-g & -b-e-h & -c-f-i & -a-e-i \end{pmatrix}$$

Como la diagonal no principal ha de sumar cero y también la cuarta columna, se deduce que:

$$-2a-b-c-d+f-g-h=0$$
$$-2a-b-c-d-2e-f-g-h-2i=0$$

Restando ambas igualdades y dividiendo por 2 resulta que:

$$e+f+h+i=0$$

Es decir, los cuatro elementos centrales suman cero. De aquí se deduce que la suma de los cuatro extremos es cero; la de los elementos centrales de las filas una y cuatro es cero y lo mismo le ocurre a la suma de los elementos centrales de las columnas una y cuatro.

Un CM de orden cuatro y suma nula ha de ser pues de la siguiente forma como se comprueba fácilmente:

$$\begin{pmatrix} r-t-v & v+w & v-w & -r+t-v \\ t+u & -r+q & r-s & -q+s-t-u \\ t-u & r+s & -r-q & q-s-t+u \\ -r-t+v & -q-s-v-w & q+s-v+w & r+t+v \end{pmatrix}$$

Si el CM de orden 4 es de suma $s=4p$ a la matriz anterior habría que sumarle la matriz pA.

6.4) Si recurriésemos al sistema de ecuaciones, obtendríamos que depende de 7 parámetros, que junto con s son 8. De modo similar a como se hizo para los CM de orden 3, se haría ahora resolviendo un sistema de nueve ecuaciones con 16 incógnitas.

6.5) Si a,b,c,d son números naturales (vale también para reales) entonces el siguiente cuadrado es mágico:

$$\begin{pmatrix} a & d & b & c \\ c & b & d & a \\ d & a & c & b \\ b & c & a & d \end{pmatrix}$$

y lo mismo son mágicos los cuadrados que se obtienen de este por reflexiones respecto a las diagonales y las mediatrices de sus lados.

En particular son mágicos los dos sumandos, y por tanto la suma, siguientes:

$$\begin{pmatrix} 40 & 20 & 10 & 30 \\ 10 & 30 & 40 & 20 \\ 30 & 10 & 20 & 40 \\ 20 & 40 & 30 & 10 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 4 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 & 1 \\ 4 & 1 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 41 & 24 & 12 & 33 \\ 13 & 32 & 44 & 21 \\ 34 & 11 & 23 & 42 \\ 22 & 43 & 31 & 14 \end{pmatrix}$$

Considerando, en la misma forma que se hizo anteriormente en (5.4) para los CMN de orden 3, los elementos de esta última matriz como pares ordenados ij representando (el lugar del elemento común a la fila i y a la columna j) lugares de una matriz 4x4, se tiene que si:

$$\begin{matrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \\ 9 & 10 & 11 & 12 \\ 13 & 14 & 15 & 16 \end{matrix} \quad \text{se colocan en los lugares} \quad \begin{matrix} 41 & 24 & 12 & 33 \\ 13 & 32 & 44 & 21 \\ 34 & 11 & 23 & 42 \\ 22 & 43 & 31 & 14 \end{matrix}$$

respectivamente, entonces el cuadrado que resulta:

$$\begin{pmatrix} 10 & 3 & 5 & 16 \\ 8 & 13 & 11 & 2 \\ 15 & 6 & 4 & 9 \\ 1 & 12 & 14 & 7 \end{pmatrix}$$

es un cuadrado mágico de suma 34.

Sumando a éste cuadrado anterior el cuadrado nA se obtiene un CM de orden 4 formado por los 16 números consecutivos posteriores a n.

Mediante las oportunas reflexiones y rotaciones del CM se obtienen otras formas diferentes de escribir los 16 números de arriba de modo que constituyan un CM.

BIBLIOGRAFIA

Los siguientes textos han sido utilizados en la redacción de los apartados 2 y 3.

-Bergamini, David:
Matemáticas. Time-Life International, 1969.
Págs. 68-69.

-*Carrés magiques,*
en «Pour une Mathematique vivante en Seconde»
Publications de L' Association des Professeurs
de Mathématiques de L' Enseignement Public, 27.
Págs. 122-124

-*Curso Básico de Matemáticas,*
Unidad 22: Algebra lineal I, The
Open University. Ed. MacGraw Hill
Latinoamericana S.A., Panamá, 1974.
Págs. 38-40-45-47.

-Herwitz, P.S.:
La teoría de los números En «Las Matemáticas en el mundo Moderno»
(dirigida por M. Kline); Ed. Blume, Madrid, 1.974.
Págs. 114-115.

-*Historia general de las Ciencias* (dirigida por R. Taton).
Ed. Destino, Barcelona.
Vol. I (1971). Págs. 215,588.
Vol. II (1972). Págs. 250,779.

-Hoffman, J.E.: *Historia de las Matemáticas,*
U.T.E.H.A. (México), 1.960.
Tomo 1, Págs. 17,128.
Tomo 2, Págs. 16,27.
Tomo 3, Págs. 25,30.