Rev.Acad.Canar.Cienc., I, 11-22 (1990)

UN CALCULO OPERACIONAL ASOCIADO AL OPERADOR $B^{*}_{\mu,\nu}=t^{\mu-\nu}Dt^{1+2\nu}Dt^{-\nu-\mu-1}$

J. Rodríguez

Departamento de Análisis Matemático, Universidad de La Laguna,

38271-La Laguna, S/C. de Tenerife, España.

ABSTRACT

In this paper, through an algebraic process similar to Mikusinski's, an operational calculus for the Bessel operator $B^{*}_{\mu,\nu}=t^{\mu-\nu}Dt^{1+2\nu}Dt^{-\nu-\mu-1}$, adjoint operator of $B_{\mu,\nu}=t^{-\nu-\mu-1}Dt^{1+2\nu}Dt^{\mu-\nu}$ has been devised, involving certain kinds of convolutions.

KEY WORDS: Cálculo, Mikusinski, Bessel, operador, convolución.

En este trabajo se desarrolla un cálculo operacional para el operador $B^{*}_{\mu,\nu} = t^{\mu-\nu}Dt^{1+2\nu}Dt^{-\nu-\mu-1} = t^{\nu+\mu}Dt^{1-2\nu}Dt^{\nu-\mu-1}$ adjunto del operador $B_{\mu,\nu} = t^{-\nu-\mu-1}Dt^{1+2\nu}Dt^{\mu-\nu} = t^{\nu-\mu-1}Dt^{1-2\nu}Dt^{\mu+\nu}$ siguiendo un proceso algebraico similar al construido por Mikusinski.

Para ello consideramos el operador fraccionario I^{α}_{m} y su inverso $I^{-\alpha}_{m}$ [3], que nos permiten definir convoluciones según los diferentes valores del parámetro ν y μ arbitrario en los espacios de funciones

$$C^2_{\nu+\mu+1}=\{f(t)/f(t)=t^{\nu+\mu+1}f_1(t)\in C^2([0,\infty)) \text{ y } f_1(t)\in C^2([0,\infty))\} \text{ para } \nu>-\frac{1}{2}$$

$$C^2_{\mu-\nu}=\{f(t)/f(t)=t^{\mu-\nu}f_1(t)\in C^2([0,\infty)) \text{ y } f_1(t)\in C^2([0,\infty))\} \text{ para } \nu<-\frac{1}{2}$$

$$C^2_{\mu+1/2}=\{f(t)/f(t)=t^{\mu+1/2}f_1(t)\in C^2([0,\infty)) \text{ y } f_1(t)\in C^2([0,\infty))\} \text{ para } \nu=-\frac{1}{2}.$$

Si se definen la suma usual y la operación convolución como multiplicación, estos espacios resultan ser anillos unitarios sin divisores de cero, siendo factible, entonces, construir los correspondientes cuerpos de fracciones, que permiten analizar un conjunto de reglas operacionales en dichos cuerpos.

2. LOS OPERADORES I_m^α y δ.

El operador I_m^α, definido para $\alpha,m>0$ por

$$I_m^\alpha f(t) = \frac{m}{\Gamma(\alpha)}\int_0^t (t^m-\xi^m)^{\alpha-1}\xi^{m-1}f(\xi)d\xi \qquad (0<t<+\infty) \tag{2.1}$$

y para $\alpha<0$, con $n\in\mathbb{N}$ y $n+\alpha>0$ por

$$D_m^n I_m^{n+\alpha} f(t) = \frac{m}{\Gamma(\alpha+n)}(D_m)^n\int_0^t (t^m-\xi^m)^{\alpha+n-1}\xi^{m-1}f(\xi)d\xi \tag{2.2}$$

donde

$$D_m f(t) = \frac{d}{dt^m}f(t) = m^{-1}t^{1-m}Df(t) \tag{2.3}$$

fueron estudiados por A.C. McBride [3]. A continuación exponemos algunas propiedades con estos operadores y el operador $\delta=tD$ que serán utilizadas en lo que sigue

Proposición 1.

Si $f(t)\in C^1(\mathbb{R})$, entonces,

$$\delta t^\alpha f(t) = t^\alpha(\delta+\alpha)f(t). \tag{2.4}$$

Proposición 2.

Si $f(t)\in C^1([0,\infty))$, con $f(0)=0$, y $\alpha>0$, entonces

$$t^{-2}\delta I_2^\alpha f(t) = I_2^\alpha t^{-2}\delta f(t). \tag{2.5}$$

Proposición 3.

Sean $\alpha>0$, k una constante real y $f(t)\in C^1([0,\infty))$, entonces:

$$I_2^\alpha(\delta+k)f(t) = (\delta+k-2\alpha)I_2^\alpha f(t). \tag{2.6}$$

Para la demostración de las proposiciones 1, 2 y 3, vease [6] y [8].

Proposición 4.

Sea $\nu>-\frac{1}{2}$ y $R_{\mu,\nu,1} = tD_2^n I_2^{n-\nu-1/2} t^{\nu-\mu-1}$ con $n\in\mathbb{N}$ y $n-\nu-\frac{1}{2}>0$. Si $f(t)\in C^2([0,\infty))$ satisface la condición $\lim_{t\to 0^+} t^{2\nu+1} Dt^{-\nu-\mu-1} f(t) = 0$, se tiene,

$$R_{\mu,\nu,1} B^*_{\mu,\nu,1} f(t) = D^2 R_{\mu,\nu,1} f(t). \tag{2.7}$$

En efecto,

$$R_{\mu,\nu,1} B^*_{\mu,\nu} f(t) = tD_2^n I_2^{n-\nu-\frac{1}{2}} t^{\nu-\mu-1} t^{-2}(\delta-\nu-\mu-1)(\delta+\nu-\mu-1) f(t)$$

siendo n el menor de los enteros positivos que es mayor que $\nu+\frac{1}{2}$ y $D_2^n = (\frac{1}{2t}D)^n = 2^{-n}t^{-2n}\prod_{i=0}^{n-1}(\delta-2i)$ los siguientes pasos se deducen de (2.4), (2.5) y (2.6),

$$tD_2^n I_2^{n-\nu-\frac{1}{2}} t^{-2}\delta(\delta-2\nu)t^{\nu-\mu-1} f(t) =$$

$$tD_2^n t^{-2}\delta I_2^{n-\nu-\frac{1}{2}} (\delta-2\nu)t^{\nu-\mu-1} f(t) =$$

$$= tD_2^n t^{-2}\delta(\delta-2n+1) I_2^{n-\nu-\frac{1}{2}} t^{\nu-\mu-1} f(t) =$$

$$= t2^{-n}t^{-2n}\prod_{i=0}^{n-1}(\delta-2i)t^{-2}\delta(\delta-2n+1) I_2^{n-\nu-\frac{1}{2}} t^{\nu-\mu-1} f(t) =$$

$$= t^{-2}t2^{-n}t^{-2n}\prod_{i=0}^{n}(\delta-2i)(\delta-2n+1) I_2^{n-\nu-\frac{1}{2}} t^{\nu-\mu-1} f(t) =$$

$$= t^{-2}(\delta-1)\delta tD_2^n I_2^{n-\nu-\frac{1}{2}} t^{\nu-\mu-1} f(t) = D^2 R_{\mu,\nu,1} f(t)$$

lo cual completa la demostración.

Proposición 5.

Sean $\nu=-\frac{1}{2}$ y $R_{\mu,\nu,2} = t^{-\mu-\frac{1}{2}}$. Si $f(t)\in C^2([0,\infty))$, se tiene:

$$R_{\mu,\nu,2} B^*_{\mu,\nu} f(t) = D^2 R_{\mu,\nu,2} f(t). \tag{2.8}$$

Basta observar que

$$t^{-\mu-\frac{1}{2}} B^*_{\mu,\nu} f(t) = D^2 t^{-\mu-\frac{1}{2}} f(t).$$

Proposición 6.

Sean $\nu<-\frac{1}{2}$ y $R_{\mu,\nu,3} = D^n I_{\frac{2}{2}}^{n+\nu+\frac{1}{2}} t^{-\nu-\mu-1}$ con $n\in\mathbb{N}$ y $n+\nu+\frac{1}{2}>0$. Si $f(t)\in C^2([0,\infty))$ satisface la condición $\lim_{t\to 0^+} t^{1-2\nu} Dt^{\nu-\mu-1} f(t) = 0$, se tiene

$$R_{\mu,\nu,3} B^*_{\mu,\nu} f(t) = D^2 R_{\mu,\nu,3} f(t). \qquad (2.9)$$

La demostración sigue un proceso similar al desarrollado en la proposición 4.

3. EL CUERPO DE LAS FRACCIONES.

Con la ayuda de los operadores $R_{\mu,\nu,1}$, $R_{\mu,\nu,2}$ y $R_{\mu,\nu,3}$ definimos diferentes convoluciones, para los diferentes valores del parámetro ν,

a) Para $\nu>-\frac{1}{2}$, consideramos el conjunto

$$C^2_{\nu+\mu+1} = \{f(t)/f(t) = t^{\nu+\mu+1} f_1(t)\in C^2([0,\infty)) \text{ y } f_1(t)\in C^2([0,\infty))\} \qquad (3.1)$$

En virtud de (2.7) y del método de la semejanza de Meller [4], por ser $R_{\mu,\nu,1}$:

$$\begin{array}{ccc} C^2_{\nu+\mu+1} & \longrightarrow & C^2 \\ f(t) & \longrightarrow & R_{\mu,\nu,1}(f(t)) \end{array}$$

un isomorfismo, se define en $C^2_{\nu+\mu+1}$ la operación * mediante

$$f(t)*g(t) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+1)} R^{-1}_{\mu,\nu,1}[(R_{\mu,\nu,1} f(t))\circ(R_{\mu,\nu,1} g(t)] \qquad (3.2)$$

para cada $f(t)$ y $g(t)\in C^2_{\nu+\mu+1}$, donde $\circ$ es la convolución para el operador D, considerada en [2] por

$$f(t)\circ g(t) = D\int_0^t f(t-\xi)g(\xi)d\xi \qquad (3.3)$$

y

$$R^{-1}_{\mu,\nu,1} f(t) = t^{-\nu+\mu+1} I_2^{\nu+\frac{1}{2}} t^{-1} f(t). \qquad (3.4)$$

Atendiendo a la definición de los operadores $R_{\mu,\nu,1}$ y $R^{-1}_{\mu,\nu,1}$ se deduce sin dificultad que para cada $p,q\in\mathbb{N}\cup\{0\}$,

$$t^{\nu+\mu+1+p} * t^{\nu+\mu+1+q} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(\frac{p+2\nu+2}{2})\,\Gamma(\frac{q+2\nu+2}{2})}{\Gamma(\nu+1)\,\Gamma(\frac{p+1}{2})\,\Gamma(\frac{q+1}{2})}.$$

$$\cdot\frac{\Gamma(p+1)\,\Gamma(q+1)\,\Gamma(\frac{p+q+1}{2})}{\Gamma(p+q+1)\,\Gamma(\frac{p+q+2\nu+2}{2})}\, t^{\nu+\mu+1+p+q}.$$

Se infiere por tanto, a tenor de la caracterización de los elementos de $C^2_{\nu+\mu+1}$, en virtud del teorema de aproximación de Weierstrass, que la operación * es cerrada en $C^2_{\nu+\mu+1}$, verificándose además las propiedades que siguen:

i) $f(t)*g(t) = g(t)*f(t)$.

ii) $f(t)*[g(t)*h(t)] = [f(t)*g(t)]*h(t)$.

iii) $f(t)*[g(t)+h(t)] = f(t)*g(t) + f(t)*h(t)$.

iv) $t^{\nu+\mu+1}*f(t) = f(t)$.

donde $f(t)$, $g(t)$ y $h(t)\in C^2_{\nu+\mu+1}$.

Proposición 7.

$C^2_{\nu+\mu+1}$ no tiene divisores de cero.

$$f(t)*g(t) = 0 \Rightarrow R^{-1}_{\mu,\nu,1}[R_{\mu,\nu,1}f(t)\circ R_{\mu,\nu,1}g(t)] = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow R_{\mu,\nu,1}f(t) = 0 \text{ o } R_{\mu,\nu,1}g(t) = 0 \Rightarrow f(t) = 0 \text{ o } g(t) = 0.$$

Concluimos entonces que

Proposición 8.

Definidas en $C^2_{\nu+\mu+1}$ las operaciones suma y *, $C^2_{\nu+\mu+1}$ tiene estructura de anillo conmutativo unitario y sin divisores de cero.

Por tanto, se puede extender $C^2_{\nu+\mu+1}$ a un cuerpo de fracciones $M=C^2_{\nu+\mu+1}x(C^2_{\nu+\mu+1}-\{0\})/\sim$, donde la relación de equivalencia ~ se define en $C^2_{\nu+\mu+1}x(C^2_{\nu+\mu+1}-\{0\})$ de la forma usual, esto es,

$$(f(t),\ g(t)) \sim (\bar{f}(t),\ \bar{g}(t)) \text{ si y solo si } f(t)*\bar{g}(t) = g(t)*\bar{f}(t).$$

En lo sucesivo el elemento $(f(t),\ g(t))$ se denota por $\frac{f(t)}{g(t)}$.

Si en M se definen las operaciones usuales de adición, multiplicación y producto por un escalar

$$\frac{f(t)}{g(t)} + \frac{\overline{f}(t)}{\overline{g}(t)} = \frac{f(t)*\overline{g}(t) + \overline{f}(t)*g(t)}{g(t)*\overline{g}(t)}$$

$$\frac{f(t)}{g(t)} \cdot \frac{\overline{f}(t)}{\overline{g}(t)} = \frac{f(t)*\overline{f}(t)}{g(t)*\overline{g}(t)}$$

$$\alpha \cdot \frac{f(t)}{g(t)} = \frac{\alpha f(t)}{g(t)}$$

entonces M resulta ser un álgebra.

Obsérvese que mediante la aplicación definida por

$$M' \subset M \longrightarrow C^2_{\nu+\mu+1}$$

$$\frac{t^{\nu+\mu+1}*f(t)}{t^{\nu+\mu+1}} \longrightarrow f(t)$$

existe una parte $M' \subset M$ que es isomorfa a $C^2_{\nu+\mu+1}$.

Por tanto los elementos de la forma $\dfrac{f(t)}{t^{\nu+\mu+1}}$ constituyen un subanillo de M, isomorfo a $C^2_{\nu+\mu+1}$.

b) Si $\nu=-\frac{1}{2}$, consideramos el conjunto de funciones

$$C^2_{\mu+\frac{1}{2}} = \{f(t)/f(t) = t^{\mu+\frac{1}{2}} f_1(t) \in C^2([0,\infty)) \text{ y } f_1(t) \in C^2([0,\infty))\}.$$

En virtud de (2.8) y del isomorfismo

$$R_{\mu,\nu,2} = t^{-\mu-\frac{1}{2}} : C^2_{\mu+\frac{1}{2}} \longrightarrow C^2$$

$$f(t) \longrightarrow f_1(t).$$

Se define, por el método de la semejanza de Meller, en $C^2_{\mu+\frac{1}{2}}$ la operación

$$f(t)*g(t) = R^{-1}_{\mu,\nu,2}[(R_{\mu,\nu,2}f(t)) \circ (R_{\mu,\nu,2}g(t))] \tag{3.5}$$

para cada $f(t)$ y $g(t) \in C^2_{\mu+\frac{1}{2}}$, donde $\circ$ es la convolución para el operador D dada por (3.3) y $R^{-1}_{\mu,\nu,2} = t^{\mu+\frac{1}{2}}$.

Con las operaciones suma y convolución * dada en (3.5), $C^2_{\mu+\frac{1}{2}}$ es un anillo conmutativo unitario y sin divisores de cero. Puede ser, pues, extendido $C^2_{\mu+\frac{1}{2}}$ a un cuerpo de fracciones. Los pasos a seguir son similares a los del caso $\nu>-\frac{1}{2}$.

c) Si $\nu<-\frac{1}{2}$, consideramos el conjunto

$$C^2_{\mu-\nu} = \{f(t)/f(t) = t^{\mu-\nu}f_1(t)\in C^2([0,\infty)) \text{ y } f_1\in C^2([0,\infty))\}.$$

Teniendo en cuenta (2.9) y el isomorfismo

$$\begin{aligned} R_{\mu,\nu,3} : C^2_{\mu-\nu} &\longrightarrow C^2 \\ f(t) &\longrightarrow R_{\mu,\nu,3}(f(t)) \end{aligned}$$

se define en $C^2_{\mu-\nu}$ la operación

$$f(t)*g(t) = \frac{1}{\Gamma(\frac{1-2\nu}{2})} R^{-1}_{\mu,\nu,3}[(R_{\mu,\nu,3}f(t))\circ(R_{\mu,\nu,3}g(t))] \tag{3.6}$$

donde $\circ$ es la convolución (3.3) y $R^{-1}_{\mu,\nu,3} = t^{\nu+\mu+1}I_2^{-\nu-\frac{1}{2}}$.

Con las operaciones suma y convolución * dada en (3.6), $C^2_{\mu-\nu}$ es un anillo conmutativo unitario y sin divisores de cero, pudiendo ser extendido a un cuerpo cociente, procediendo de igual modo al caso a).

4. UN CALCULO OPERACIONAL.

Atendiendo a cada uno de los diferentes valores del parámetro ν, se pueden encontrar reglas operacionales. Aquí lo abordamos para el caso $\nu>-\frac{1}{2}$, pudiendose obrar de igual modo para los casos b) y c).

Para ello obsérvese que el operador integral

$$L^*_{\mu,\nu}f(t) = t^{\nu+\mu+1}\int_0^t \xi^{-2\nu-1}d\xi\int_0^\xi \eta^{\nu-\mu}f(\eta)d\eta$$

inverso por la derecha de $B^*_{\mu,\nu}$, pertenece a M.

Proposición 9.

Sea $f(t)\in C^{2}_{\nu+\mu+1}$, se tiene,

$$\frac{t^{\nu+\mu+3}}{2^{2}(\nu+1)}*f(t) = L^{*}_{\mu,\nu}f(t). \tag{4.1}$$

Demostración:

$$\frac{t^{\nu+\mu+3}}{2^{2}(\nu+1)}*f(t) = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(\nu+1)}\, R^{-1}_{\mu,\nu,1}[(R_{\mu,\nu,1}\,\frac{t^{\nu+\mu+3}}{2^{2}(\nu+1)})\circ(R_{\mu,\nu,1}f(t))] =$$

$$= R^{-1}_{\mu,\nu,1}[(\frac{t^{2}}{2})\circ(R_{\mu,\nu,1}f(t))] = R^{-1}_{\mu,\nu,1}I^{2}R_{\mu,\nu,1}f(t). \tag{4.2}$$

pero de (2.7) para $f(t)\in C^{2}_{\nu+\mu+1}$ tenemos que

$$I^{2}R_{\mu,\nu,1}B^{*}_{\mu,\nu}f(t) = R_{\mu,\nu,1}f(t)$$

por tanto,

$$I^{2}R_{\mu,\nu,1}f(t) = R_{\mu,\nu,1}L^{*}_{\mu,\nu}f(t)$$

que sustituido en (4.2) queda

$$\frac{t^{\nu+\mu+3}}{2^{2}(\nu+1)}*f(t) = R^{-1}_{\mu,\nu,1}R_{\mu,\nu,1}L^{*}_{\mu,\nu}f(t) = L^{*}_{\mu,\nu}f(t).$$

De la proposición anterior se deduce por inducción

Proposición 10.

Para $k\in\mathbb{N}$ y $f(t)\in C^{2}_{\nu+\mu+1}$, se tiene,

$$\frac{\Gamma(\nu+1)t^{\nu+\mu+2k+1}}{2^{2k}k!\Gamma(\nu+k+1)}*f(t) = L^{*^{k}}_{\mu,\nu}f(t).$$

Por tanto, los operadores $L^{*^{k}}_{\mu,\nu}$ pertenecen a **M** y se representan por

$$L^{*^{k}}_{\mu,\nu} = \frac{\Gamma(\nu+1)t^{\nu+\mu+2k+1}}{2^{2k}k!\Gamma(\nu+k+1)} \tag{4.3}$$

Proposición 11.

Para $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ y $B^{*^{k}}_{\mu,\nu}f(t)\in C^{2}_{\nu+\mu+1}$, se tiene

$$B^{*^{k}}_{\mu,\nu}f(t) = L^{*}_{\mu,\nu}B^{*^{k+1}}_{\mu,\nu}f(t) + t^{\nu+\mu+1}[t^{-\nu-\mu-1}B^{*^{k}}_{\mu,\nu}f(t)]_{|t=0^{+}}. \tag{4.4}$$

En efecto,

$$L^{*}_{\mu,\nu}B^{*^{k+1}}_{\mu,\nu}f(t) = t^{\nu+\mu+1}\int_0^t \xi^{-2\nu-1}d\xi\int_0^{\xi}\eta^{\nu-\mu}\eta^{\mu-\nu}D\eta^{2\nu+1}\cdot$$

$$\cdot D\eta^{-\nu-\mu-1}B^{*^{k}}_{\mu,\nu}f(\eta)d\eta = B^{*^{k}}_{\mu,\nu}f(t) - t^{\nu+\mu+1}[t^{-\nu-\mu-1}B^{*^{k}}_{\mu,\nu}f(t)]_{|t=0^+}$$

por ser $\lim_{t\to 0^+} t^{2\nu+1}Dt^{-\nu-\mu-1}B^{*^{k}}_{\mu,\nu}f(t) = 0.$

Sea V el operador

$$2^2(\nu+1)\frac{t^{\nu+\mu+1}}{t^{\nu+\mu+3}}$$

y V^k la k-veces aplicación de V. En relación con este operador, se puede establecer la siguiente

<u>Proposición 12.</u>

Sea $f(t)\in C^2_{\nu+\mu+1}$, se tiene

$$Vf(t) = V*f(t) = B^{*}_{\mu,\nu}f(t) + V[t^{-\nu-\mu-1}f(t)]_{|t=0^+}. \tag{4.5}$$

En efecto, aplicando V a (4.4), tenemos

$$Vf(t) = 2^2(\nu+1)\frac{t^{\nu+\mu+1}}{t^{\nu+\mu+3}}*\left(\frac{t^{\nu+\mu+3}}{2^2(\nu+1)}*B^{*}_{\mu,\nu}f(t)\right) +$$

$$+ V*t^{\nu+\mu+1}[t^{-\nu-\mu-1}f(t)]_{|t=0^+} = B^{*}_{\mu,\nu}f(t) + V[t^{-\nu-\mu-1}f(t)]_{|t=0^+}.$$

Procediendo por inducción se obtiene:

<u>Proposición 13.</u>

Si $k\in\mathbb{N}$, $f(t)$ y $B^{*^{k}}_{\mu,\nu}f(t)\in C^2_{\nu+\mu+1}$, se tiene

$$V^kf(t) = B^{*^{k}}_{\mu,\nu}f(t) + \sum_{j=1}^{k}V^j[t^{-\nu-\mu-1}B^{*^{k-j}}_{\mu,\nu}f(t)]_{|t=0^+} \tag{4.6}$$

Demostración:

Es cierto para k=1, por (4.5). Supuesto cierto para k=m y aplicando V queda

$$V(V^mf(t)) = V(B^{*^{m}}_{\mu,\nu}f(t)) + \sum_{j=1}^{m}V^{j+1}[t^{-\nu-\mu-1}B^{*^{m-j}}_{\mu,\nu}f(t)]_{|t=0^+}$$

sustituyendo el valor (4.4) queda:

$$V^{m+1}f(t) = B^{*\,m+1}_{\mu,\nu} f(t) + V[t^{-\nu-\mu-1}B^{*}_{\mu,\nu} f(t)]|_{t=0^+} +$$

$$+ \sum_{j=1}^{m} V^{j+1}[t^{-\nu-\mu-1}B^{*\,m-j}_{\mu,\nu} f(t)]|_{t=0^+} =$$

$$= B^{*\,m+1}_{\mu,\nu} f(t) + \sum_{j=1}^{m+1} V^{j}[t^{-\nu-\mu-1}B^{*\,m+1-j}_{\mu,\nu} f(t)]|_{t=0^+}.$$

A continuación, obtenemos algunas reglas operacionales que serán utiles en ciertas aplicaciones.

Como puede ser probado, las ecuaciones diferenciales

$$(B^{*}_{\mu,\nu} \mp a^2)y = 0 \qquad (a\in\mathbb{R}) \tag{4.7}$$

admiten como soluciones las funciones

$$y_1(t) = (at)^{\mu+1}J_\nu(at) = J^{*}_{\mu,\nu}(at) \quad \text{(para el signo +)}$$

$$y_2(t) = (at)^{\mu+1}I_\nu(at) = I^{*}_{\mu,\nu}(at) \quad \text{(para el signo −)}.$$

Aquí $J_\nu(t)$ y $I_\nu(t)$ denotan las funciones de Bessel y modificada de Bessel de primera especie de orden ν, respectivamente. Como además

$$\lim_{t\to 0^+} t^{-\nu-\mu-1}J^{*}_{\mu,\nu}(at) = \lim_{t\to 0^+} t^{-\nu-\mu-1}I^{*}_{\mu,\nu}(at) = \frac{a^{\nu+\mu+1}}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}, \tag{4.8}$$

se infiere de (4.5), (4.7) y (4.8) que

$$Vf(t) = \mp a^2 t^{\nu+\mu+1} * f(t) + \frac{a^{\nu+\mu+1}}{2^\nu\Gamma(\nu+1)}V$$

Por tanto, pueden ser obtenidas las reglas

$$\frac{V}{V + a^2 t^{\nu+\mu+1}} = \frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{a^{\nu+\mu+1}} J^{*}_{\mu,\nu}(at) \tag{4.9}$$

$$\frac{V}{V - a^2 t^{\nu+\mu+1}} = \frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{a^{\nu+\mu+1}} I^{*}_{\mu,\nu}(at) \tag{4.10}$$

Un cálculo directo establece la validez de las siguientes fórmulas:

$$\frac{a^2 t^{\nu+\mu+1}}{V + a^2 t^{\nu+\mu+1}} = 1 - \frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{a^{\nu+\mu+1}} J^{*}_{\mu,\nu}(at) \tag{4.11}$$

$$\frac{-a^2 t^{\nu+\mu+1}}{V - a^2 t^{\nu+\mu+1}} = 1 - \frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{a^{\nu+\mu+1}} I^{*}_{\mu,\nu}(at) \tag{4.12}$$

$$\frac{V^2}{V^2-a^4t^{\nu+\mu+1}} = \frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{a^{\nu+\mu+1}}\left[\frac{I^*_{\mu,\nu}(at)+J^*_{\mu,\nu}(at)}{2}\right] \tag{4.13}$$

$$\frac{a^2V}{V^2-a^4t^{\nu+\mu+1}} = \frac{2^\nu\Gamma(\nu+1)}{a^{\nu+\mu+1}}\left[\frac{I^*_{\mu,\nu}(at)-J^*_{\mu,\nu}(at)}{2}\right] \tag{4.14}$$

Nota.-

Obsérvese, que por ser

$$t^{-2\mu-1}B^*_{\mu,\nu} = B_{\mu,\nu}t^{-2\mu-1}$$

y ser isomorfismo la aplicación

$$t^{-2\mu-1} : C^2_{\nu+\mu+1} \longrightarrow C^2_{\nu-\mu}$$

$$f(t) = t^{\nu+\mu+1}f_1(t) \longrightarrow t^{\nu-\mu}f_1(t)$$

en virtud del teorema de la semejanza de Meller, en el caso de $\nu>-\frac{1}{2}$, una convolución para $B^*_{\mu,\nu}$ es:

$$f(t)*g(t) = t^{2\mu+1}[(t^{-2\mu-1}f(t)) \,\bar{*}\, (t^{-2\mu-1}g(t))]$$

donde $\bar{*}$ es una convolución para el operador $B_{\mu,\nu}$ [7].

De igual modo se procede para $\nu=-\frac{1}{2}$ y $\nu<-\frac{1}{2}$.

BIBLIOGRAFIA

(1) I.H. Dimovski: "A convolutional method in operational calculus", Summary of a thesis, The United Centre for Research and Training in Mathematics and Mechanics, Sofia, 1977.

(2) V.A. Ditkin and A.P. Prudnikov: "Integral Transforms and Operational Calculus", Pergamon, 1965.

(3) A.C. McBride: "Fractional Calculus and integral transforms of generalized functions", Ed. Pitman Adv. Publ. Program, Londres, 1979.

(4) N.A. Meller: "On some applications of operational calculus to problems in analysis", Journ. Vichisl. Mat. i. Mat. Fiz 3(1), 1963, 73-89

(5) J. Mikusinski: "Operational Calculus", Pergamon, 1959.

(6) J. Rodríguez: "A Mikusinski calculus for the Bessel-Type operator $B_{-\nu}$", (Preprint).

(7) J. Rodríguez: "Operational calculus for the generalized Bessel operator", (Preprint).

(8) J.J. Trujillo y J.C. Moreno: "Los operadores fraccionarios de Liouville y la ecuación de Bessel", Actas VIII C.E.D.Y.A., Santander, 1985.