Rev. Acad. Canar. Cienc., XX (Núms. 1-2), 77-109 (2008) (publicado en septiembre de 2009)

LA CONJETURA DE GOLDBACH

Nácere Hayek
Universidad de La Laguna (Spain)
E-mail: nhayek@ull.es

No creo que sea totalmente inútil plantear aquellas proposiciones que son más probables, aunque falte una verdadera demostración, pues aún cuando se descubra que son incorrectas, pueden conducir al descubrimiento de una nueva verdad (Cita de Christian Goldbach)

Abstract
In this article, dealing with the Goldbachs´s conjecture, a summary of certain historical events closely related to the problematic emphasizing the influence this conjecture would come to reach around all of its social and cultural environment, is previously given. For this purpose, we start by mentioning the first contributions of the primitive Mathematics onto the general number theory. Nextly, we will concentrate ourselves on the permanent presence of Goldbach´s conjecture on certain works associated with the name of famous mathematicians, specially those ones concerning very important problems as, the distribution of the prime numbers, the infiniteness of the so-called twin prime numbers, certain classes of special numbers, congruences, infinite sums and so on. Finally, a brief chronological description of several questions appearing in different publisher papers related to the above conjecture, is also presented.

Resumen
En este artículo en el que se trata la conjetura de Goldbach, se antepone un preámbulo de unos hechos históricos acaecidos y vinculados con una problemática, que resalta la influencia que llegaría a tener la misma, en todo su entorno sociocultural. Se comienza citando las primeras contribuciones de las matemáticas primitivas en la teoría general de números, mostrándose a continuación, la ineludible presencia de la conjetura de Goldbach en las aportaciones asociadas a nombres de matemáticos famosos, especialmente en problemas importantes como el de la distribución de los números primos entre los naturales, el de la infinitud de primos gemelos, ciertas clases de números especiales, congruencias, sumas infinitas y otros, para terminar con una breve descripción cronológica de algunas cuestiones recogidas de trabajos publicados relacionados con la conjetura.

1. Prefacio: Breve compendio sobre la verdad matemática* .

Desde hace muchísimos años, la matemática ha preferido mantenerse ajena a los conocidos procedimientos de razonamiento por inducción y por analogía, tan eficazmente utilizados a menudo por otros científicos (que incluyen los de las ciencias naturales y sociales), hasta tal punto que los que construyen matemáticas solamente se rigen por la máxima de que *todas las pruebas matemáticas deben ser deductivas*, es decir, han de ser obtenidas por el método de deducción, un proceso en el que "toda prueba representa una cadena de argumentos deductivos, cada uno de los cuales tiene sus premisas y conclusión"[1] . Fueron algunos descubrimientos históricos los que inclinaron a los matemáticos por dicha poco menos que férrea posición.

En términos generales, si se hace un breve repaso histórico, se constata que las dificultades lógicas atormentaron a los matemáticos durante los siglos XVII, XVIII y XIX. En el siglo XVII, las matemáticas se encontraban en una situación de incertidumbre. La inexistencia de unos correctos cimientos de la disciplina produjo un estado de confusionismo, que se dilataría hasta finales del siglo XIX. Ya a partir de 1900, si se analizaran los fundamentos de su disciplina para averiguar la verdad matemática apoyada en la lógica, se observarían desarrollos que llegarían a ser desconcertantes. Los matemáticos, en mayor medida que otros científicos, desde siempre

---

* La comprensión y la repercusión de ciertas conjeturas científicas y en particular, la conjetura de Goldbach, han sido siempre mejor asimiladas mucho tiempo después de ser formuladas. Con el propósito de dar una más amplia información y mayor conocimiento de dicha conjetura a tratar en este trabajo, estimamos indispensable anteponer al profano en la materia y a lectores en general no especializados, este preámbulo de precedentes históricos sobre las razones que conllevaron a establecer la verdad matemática lógicamente estructurada, partiendo desde la presentación de la axiomática clásica griega hasta finales del siglo XIX. Se penetra seguidamente en la problemática generada en el siglo pasado durante el período matemático que fue conocido como "crisis de fundamentos". A las personas con más conocimiento sobre esta problemática, podrían comenzar la lectura del trabajo desde el parágrafo 2.

La conjetura de Goldbach, calificada a veces como el problema más difícil de la historia, representa hoy en día, el papel de una obra inacabada en la que, a pesar del mucho ingenio utilizado para vencer las dificultades que se presentarían durante su ejecución, no se pudo conseguir una definitiva construcción de la misma. Por ende, la conjetura se quedó sin alterar el sello de irresolubilidad que siempre mantuvo desde sus mismísimos orígenes.

[1] Como es conocido, los argumentos se dividen en dos clases, *deductivos e inductivos*. Las premisas de los argumentos inductivos requieren razones (a veces, incluso incompletas o parciales) como pilares básicos de la conclusión. En las ciencias en general, los argumentos son frecuentemente de este tipo y la aceptación de premisas conduce a la conclusión más razonable. En cambio, un argumento deductivo requiere para su conclusión, la estricta <u>necesidad</u> de las premisas. Una prueba matemática es un argumento deductivo.

apreciaron el poder de la estructura lógica y nunca les importó perseguir las generalidades abstractas durante décadas. En opinión de los eruditos, una gran parte de científicos seguía creyendo que las matemáticas constituían un conjunto de verdades inquebrantables sobre el mundo físico y que su razonamiento era exacto e infalible. Sin embargo, en el último decenio del XIX, ninguna de las ramas de las matemáticas estaba lógicamente asegurada. Se carecía de exactitud en la demostración y con el pesado lastre de confusiones y controversias que se promovieron (en especial, en el área del análisis), se desencadenó un indispensable movimiento hacia una rigorización de las matemáticas. Durante un período de algo más de treinta años (1895-1930), se crearon diversas escuelas que, al tratar de encerrar a las matemáticas dentro de los límites de la mente humana, destacarían entre ellas tres concepciones filosóficas importantes conocidas como *logicismo*, *intuicionismo* y *formalismo*, esforzándose cada una en hacer prevalecer sus puntos de vista sobre las restantes. Las discusiones diversas que las mismas entablaron, no pudieron tranquilizar la conciencia matemática. Al no haber unanimidad en las aproximaciones de los fundamentos ideadas por dichas escuelas en torno al propio significado de lo que representaban matemáticas correctas, se produjo el curioso hecho de que cada matemático adoptase la aproximación que más le atrajera, de acuerdo con los principios de cada aproximación. Esto originó un cúmulo de problemas, que en la historia se conocería como *crisis de fundamentos*.
Si nos remontamos a la geometría griega[2] , la forma típica de presentar un cálculo lógico (como lenguaje formalizado) en una teoría, era el método axiomático (un método cuyos orígenes se entroncan en la tradicional obra "Elementos" de Euclides -escrita 300 años a.C. - que representaría la axiomática clásica)[3] y que inició el paso que llevó a unas matemáticas de lo continuo a fundamentarse sobre las matemáticas de lo discreto. Los matemáticos se aferraron entonces a la idea de disponer de una teoría que arrancara de una colección o conjunto de nociones primeras que no se definen (conceptos *primitivos*) y de un conjunto de enunciados (o reglas) que se admitiesen sin demostración (*axiomas*), a partir de los cuales se pudieran obtener todas las demás afirmaciones (o teoremas) de la teoría en cuestión. Ambos conjuntos configuraban la *axiomática* del sistema. Los axiomas tenían que ser considerados como verdades autosuficientes que además, debían ser independientes; la generación de proposiciones y

[2] Desde los tiempos de Platón, para los griegos las "matemáticas" significaban "geometría" y "la filosofía de las matemáticas" sería "la filosofía de la geometría".
[3] "Toda ciencia demostrativa tiene que partir de principios indemostrables; de otro modo, los pasos de la demostración serían infinitos" (Aristóteles, 384-321 a. C.).

teoremas, se atenía al método de demostración deductiva. Tras el enorme desarrollo alcanzado por la ciencia, las matemáticas hubo de distribuirse bastante siglos después en varias especialidades, y una vez que se reconociera que la teoría del análisis matemático se reducía, en último término, al número natural (subyacente en nuestra intuición y nuestro propio intelecto), la axiomática de dicha teoría se limitó a la construcción de una *aritmética* con base en N (conjunto de los números enteros positivos) y el cero, recurriendo principalmente a una teoría de N desarrollada por el matemático italiano G. Peano (1858-1932)[4] . El número natural dejaría luego en esa época de representar la primera expresión de la *aritmética* y tuvo que ser sustituido por la noción de "conjunto", que se apoyaba en una teoría desarrollada por Georg Cantor (1845-1918), quien dio una sistematización más adecuada para la aritmética precedente de Peano y que se denominaría "la aritmética de los conjuntos infinitos" o "aritmética transfinita"[5] . La teoría de conjuntos dejaría una indeleble huella en las cuestiones filosóficas más profundas de los fundamentos de la matemática. Ya en la época precantoriana, matemáticos y filósofos se habían amedrentado ante el "infinito", un concepto imposible de imaginar y de abordar. La aludida aritmética de números cardinales y ordinales transfinitos provocó grandes controversias que agitaron aún más las olas del revuelto mar matemático, en particular, el papel que desempeñaba la lógica. En el núcleo de especulaciones de Cantor en relación con el infinito, formó parte

[4] Peano (1889) acotaría la esencia de N, eligiendo como conceptos primitivos, al cero, al número y a la operación de paso de un número al siguiente, y postulando cinco axiomas entre los que se encontraba incluido el principio de "inducción completa", el cual permitía distinguir en un sistema formal de N, el enunciado de una proposición verdadera del sistema de otro enunciado falso. Al abarcar este principio un número infinito de razonamientos se imposibilitaba la consistencia de los fundamentos, por lo que más adelante se contemplaría por algunos científicos como un misterio inescrutable (Para más detalles, véase N. Hayek, *Los orígenes de la matemática moderna*, Serv. Publicaciones Universidad de La Laguna (Artes Gráficas Grosso, Oviedo, 1979).

[5] La teoría de conjuntos ha sido más fundamental para las matemáticas que la aritmética y las ideas de dicha teoría resultaron ser indispensables para comprender mejor la matemática moderna. Galileo fue el primero en alertar acerca del hecho de que la naturaleza de las colecciones infinitas es fundamentalmente distinta del de las colecciones finitas. La pretensión de numerar las primeras, estremeció los fundamentos de las matemáticas, porque los principios lógicos en el razonamiento matemático usual incluían contradicciones hasta entonces inadvertidas. En lo finito, una sola pluralidad engendra el mismo número cardinal y el mismo número ordinal; pero esas dos nociones de cardinal y ordinal, se *separan* completamente una de la otra en el dominio del infinito y un mismo conjunto podía dar origen a dos ordinales diferentes.

preferente la noción de *potencia*[6] . Cantor se ocuparía de los conjuntos equipotentes (o de igual potencia) , a los que denominó "conjuntos numerables"[7] . Estos conjuntos tienen como cardinal el *aleph-cero.* Mostró además que hay infinitos mayores que el del conjunto N de los números naturales, por ejemplo, el del conjunto R de los números reales, lo que daría lugar a la *hipótesis del continuo* debida a Hilbert sobre la imposibilidad de encontrar algún conjunto con más elementos que N, pero con menos que R [8]

Sentado lo anterior, la tesis de la primera de las escuelas anteriormente citadas, la *logicista*, fue enunciada brevemente por uno de sus grandes artífices, Bertrand Russell (1872-1970), con la expresión de que "todas las matemáticas eran derivables de la lógica" (la idea central se sustentaría en que la aritmética era idéntica a alguna parte de la última) ; la segunda de ellas, la *intuicionista*, propulsada por E.L. Brouwer (1881-1966), "desafió el encadenamiento de la lógica, apoyándose en la intuición como noción más básica de arranque de todas las matemáticas", y la tercera, la *formalista*, máxima oponente de los intuicionistas, confiaría entusiásticamente en el poder de la razón y en su fundador D. Hilbert (1862-1943), que había definido a las matemáticas como "la ciencia de la demostración rigurosa". La ciencia matemática, cuyas conclusiones habían sido consideradas no sólo infalibles, sino verdades auténticas acerca de nuestro universo, quedó empañada por el conflicto entre las escuelas de fundamentos y las afirmaciones sobre los principios correctos de razonamientos. En todo tiempo, se tenía admitido que las características que han distinguido la

---

6 Una noción que en su teoría permitía hacer comparaciones entre conjuntos infinitos, sin tener necesidad de contar sus elementos. Cantor estimaba que el infinito *actual* (ó infinito en acto) existe y se trata de un infinito dado de forma inmediata, completamente determinado. Al ser definido el infinito, una magnitud *sin límites*, toda especulación que lo utilizase como una especie de número concreto, vaticinaba que conducía a paradojas ruinosas.

7 El uso del concepto de correspondencia *biunívoca*, facilitaría a Cantor establecer que, a un elemento del conjunto N de los números naturales 1,2,3,..., se le podía hacer corresponder un elemento y sólo uno del conjunto de sus números pares 2,4,6...(o sea, 1 con el 2, 2 con el 4,...) e inversamente. Por grandes que fuesen los números considerados, esta correspondencia era biunívoca, lo que mostraba que N y un subconjunto de N, eran dos conjuntos equipotentes. Conjuntos con igual potencia constituían la clase de conjuntos numerables. Sin embargo, muchos pensadores se opondrían a la emergente teoría de Cantor, al ver que podía establecer también una correspondencia biunívoca de N con el de sus números impares, o bien de N y el conjunto de los cuadrados de sus elementos, y otros más; por esta razón se negarían más adelante, a dar sentido a comparaciones entre conjuntos infinitos.

8 El número "transfinito" *aleph-uno*, que siguió al aleph-cero, designaría la cardinalidad del conjunto R y se le conocería como la potencia del continuo.

matemática de las distintas áreas de las ciencias empíricas, habían sido sin duda la proverbial certeza de sus resultados, y que la naturaleza de la verdad matemática se entendiera por el método con el cual se establece. El creciente cuerpo de la lógica matemática sería un gran punto de fricción que obligó a los matemáticos a ser conscientes del uso de principios lógicos. A diferencia de lo que ocurre con las empíricas, en una teoría matemática rigurosamente desarrollada, algunas verdades de su axiomatización se venían aceptando como "autoevidentes", lo que tropezaría con algunas dificultades y, en particular, la de que "a menos que se aceptaran algunos axiomas sin demostrar, el proceso supondría una regresión al infinito[9] . Señalemos aquí que muchas conjeturas (y proposiciones) matemáticas (en especial, en la teoría de conjuntos y la topología) se hacen difíciles de justificar y resultan ser todo, menos "autoevidentes", ya que chocan con intuiciones muy arraigadas. Las matemáticas abundan en enunciados que parecen autoevidentes, para los que no se ha hallado ninguna excepción y que, sin embargo, se han resistido a todo intento de demostración. Por ejemplo, la conjetura de Goldbach, según la cual "todo número par es la suma de dos números primos"; es de contenido muy elemental y nada difícil de entender[10] . La afirmación puede no ser cierta ni falsa. No obstante, aún no se ha encontrado una demostración general válida para todos los números pares. Se cree que la conjetura es cierta, aunque hasta la fecha nadie ha sido capaz de conseguir una prueba irrefutable[11].

En 1900, los matemáticos habían dado a su disciplina la estructura que Euclides delineó en sus *Elementos*. Tras vagar durante muchos siglos en medio de una niebla intelectual, el siglo XIX asistió a una gran expansión de investigación matemática. Si bien a finales del mismo, se consideraba que no había "otra" geometría (u "otras matemáticas"; recuérdese Nota pie 2) que la de Euclides, al reflexionar sobre sus axiomas, se descubrieron otras nuevas (o sea, "otras" matemáticas), creándose nuevas áreas (aritmética, álgebra, análisis) y nuevos sistemas formales, con la ayuda de técnicas más

---

[9] El mayor rigor que permitió la aproximación matemática, puso en evidencia la necesidad de utilizar "términos indefinidos" (el círculo vicioso origina que el término "definido" no pueda entrar en la definición para evitar la regresión infinita).

[10] Su enunciado puede ser verdadero, pero tal vez no derivable de los axiomas de la aritmética.

[11] Para esta conjetura y otras relacionadas con ella, se ha sugerido que se modificaran o completaran los axiomas, si bien Gödel al que nos referiremos acto seguido, *mostraría que este planteamiento no promete ninguna solución (...); la aritmética es un sistema esencialmente incompleto* (E. Nagel y J.R. Newman, *La demostración de Gödel*, Sigma 5, Ed. Grijalbo, Barcelona, 1969, cap. 1 (parte 4).

rigurosas[12]. Surgieron fuertes dificultades que resquebrajaron algunas cuestiones básicas, propiciándose entonces *paradojas* que afectarían enormemente el estudio de los fundamentos de las matemáticas y las relaciones de éstas con la lógica.

Un sistema matemático formal (axiomatizado), necesariamente ha de cumplir dos condiciones fundamentales: ser *consistente* (esto es, ser coherente, o sea, estar definido de forma que no permita la contradicción), y ser *completo* (es decir, que permita demostrar todas las proposiciones de la teoría, asignándole un valor de verdadero o falso).

Posturas bastante diferentes adoptaron las anteriores escuelas respecto de la consistencia y de la completitud. Las paradojas afectarían enormemente el estudio de los fundamentos de las matemáticas y las relaciones de éstas con la lógica. Por ello, lógicos y matemáticos se enfrascaron en un período de confusión y consternación, que conmovieron a la ciencia durante decenas de años. Desde el último lustro del siglo XIX, se cayó en la cuenta de que ciertos conjuntos incluso finitos, eran contradictorios. El primer problema (o primera condición de los sistemas) fue decisivo. Consistía en establecer la *consistencia* de las matemáticas puesto que se habían resuelto paradojas conocidas, y continuaba el peligro de que pudieran descubrirse otras nuevas[13] . El segundo de los problemas, el de la *completitud*, conllevaba entre otras razones, que algunas conjeturas como la de Goldbach, cayeran dentro de una categoría de verdad dudosa, debido a que estaban basadas en la imposibilidad de que infinitos objetos se comportasen igual que un número finito de ellos (al respecto, existían bastantes ejemplos para dudar de dicha hipótesis).

A raíz de los acontecimientos más importantes que aparecieron en la historia de la ciencia, también otros autores anteriores y posteriores a Cantor, descubrieron que la teoría de conjuntos aparentemente tan sencilla para

---

12 Algunos insignes matemáticos, el primero el eminente A.L Cauchy (1789-1857), propusieron rigorizar el análisis, emprendiendo una construcción de la lógica en el cálculo. Los sistemas matemáticos formales actuales, proceden del primer intento de rigorización del pensamiento matemático. Para más detalles, véase P.J. Davis y R. Hersh, *Experiencia Matemática*, Editorial Labor, Barcelona (1988), cap. 8.

13 Existen paradojas matemáticas de tres tipos: las nacidas de proposiciones absurdas y contradictorias procedentes de razonamientos falsos, otras grotescas e increíbles, que resultan de proposiciones extrañas (lógicamente irreprochables, aunque ininteligibles para nuestra intuición), y las paradojas "lógicas", sin duda las más importantes, que aparecen en conexión con la teoría de conjuntos. Algunos autores contrarios al logicismo, estimaron que estas últimas paradojas no eran lógicas, sino estrictamente matemáticas, debido a un uso incorrecto de la noción de infinito. Véase J.R. Newman, **loc. cit.**, p. 323.

fundamentar las matemáticas con conceptos lógicos, hizo posible ante la noción de infinito, construir contradicciones o paradojas[14].
El método axiomático incluía ciertas limitaciones, no sólo cuando se aplicase a sistemas complejos, sino incluso a sistemas sencillos como la aritmética de los números enteros. La consistencia de cualquier sistema matemático, lo suficientemente amplio para que abarcara esta aritmética, no pudo ser finalmente demostrada mediante principios lógicos por las escuelas de los logicistas y formalistas, ni tampoco por los del grupo de conjuntistas[15]. Los únicos matemáticos que pudieron mantener cierta serenidad, fueron los intuicionistas; para ellos no tenía sentido el juego de principios lógicos, ya que la consistencia de las matemáticas quedaba clara porque el significado intuitivo la garantizaba; se mostraron también indiferentes al problema de la completitud, pese a que incluía demostraciones de proposiciones que habían desafiado a los matemáticos durante décadas e incluso siglos. Los logicistas tampoco abordarían este problema, y los formalistas fueron los únicos no satisfechos con ninguno de los dos problemas[16].
E. Zermelo (1871-1953) en 1908 daría un respiro a la dramática crisis anterior, al conseguir plantear axiomas que eliminaban aquellos conjuntos capaces de engendrar paradojas (el más famoso de ellos, su *axioma de elección*). Hubieron también otras axiomatizaciones, con firmes propósitos de perfeccionarlas (Fraenkel (1922), Von Neumann (1925, 1928) Bernays (1922, 1929, 1937,1948), Skolem (1925, 1928), etc.
La enconada disputa de las precedentes escuelas filosóficas de pensamiento, culminaría al llegar la década de los 1930 con la definitiva destrucción del sueño de Fausto de todo matemático: la de probar que su ciencia se encontraba libre de dudas y contradicciones.
En 1931 apareció un artículo titulado *Sobre proposiciones formalmente indecidibles de Principia Matemática y sistemas análogos*, cuyo autor era un joven matemático de 25 años de la Universidad de Viena, Kurt Gödel

[14] No obstante, B. Russell y otros (Grelling, Richards, Epiménides,...) descubrieron paradojas que no implicaban la noción de infinito. Al gran pensador cretense Epiménides le fue atribuida la paradoja epistemológica reflejada en la frase "todos los cretenses siempre mienten". Si llamamos **p** a este enunciado, sigue que, si **p** es **verdadero**, lo que dice Epiménides (como cretense que es), **p** es **falso.** Pero si **p** es **falso**, como la verdad es la negación de lo que dice, se infiere que **p** es **verdadero.** También fue llamada *paradoja del embustero.*

[15] Los conjuntistas eran seguidores de Cantor de una "cuarta" escuela, que creyeron que unos axiomas cuidadosamente construidos eliminarían las paradojas a que daban lugar la teoría cantoriana.

[16] Véase para más detalles, M. Kline, *La pérdida de la certidumbre*, Siglo XXI, Madrid, 1985, cap. 12 y N. Hayek, *Los orígenes de la matemática moderna*, **loc. cit.**

(1906-1978), (posiblemente el lógico más grande de la historia), que asestó un terrible golpe a las esperanzas de toda axiomatización, destrozando la inexpugnabilidad de la verdad matemática con un teorema de incompletitud[17]. El término "proposiciones indecidibles" del artículo, cabe identificarlo como un tipo de proposiciones que no pueden ser demostradas ni refutadas dentro de un sistema dado, y los *Principia Matemática* se refieren al monumental tratado de B. Russell y A.N. Whitehead sobre la lógica de la matemática y los fundamentos de esta última. Una de las conclusiones principales del teorema mostraba la existencia de verdades matemáticas imposibles de demostrar dentro del marco axiomático en que se encontraban situadas. El teorema rechazaba como imposible la consistencia de cualquier aproximación por parte de las tres escuelas filosóficas anteriores. Más concisamente: dado cualquier conjunto consistente de axiomas aritméticos, existen enunciados aritméticos verdaderos que no son derivables de dicho conjunto. Desarrollos posteriores, no hicieron más que complicar la situación, frustrando cualquier intento de definir las matemáticas y de lo que significaban resultados correctos.

La teoría de conjuntos se consagró en 1950. En su andadura se produjo un momento crucial, que podríamos situarlo en el año 1939. En los albores de la Segunda Guerra Mundial se gestó un singular proyecto de transformación de las matemáticas que sería llamado el movimiento de la "matemática moderna", a cargo de un reducido grupo de matemáticos franceses destacados como de los más grandes del mundo, bajo el seudónimo de "Nicholas Bourbaki". Su objetivo inicial fue la reforma total de la enseñanza de las matemáticas. Desarrollaron un ingente proceso de sistematización y unificación, apoyándose en la teoría de conjuntos: la axiomatización más extraordinaria y radical de la historia de las matemáticas. Más adelante, existirían buenas razones para dudar sobre este plan de reordenación del universo matemático, entre ellas la de que se pretendiese que el alumno entendiera la matemática, si su exposición se efectuaba lejos de su actividad diaria[18]. Para concluir, cabe suponer que no existe argumento supremo y definitivo, que permita considerar el método axiomático como la postrera concepción de la ciencia, y ni siquiera que la base conjuntista haya adquirido derechos inalienables de realidad.

---

[17] Hemos de matizar que "completitud" significa que los axiomas de una rama de las matemáticas son adecuados para establecer la corrección o falsedad de cualquier aserción significativa formulada mediante los conceptos de la rama.

[18] El fracaso de la "matemática moderna", estuvo sin duda motivado por el aumento de rigor que experimentaría el pensamiento matemático desde finales del XIX hasta principios de la década de los 1940.

Para muchos, la revisión de fundamentos debiera ser en todo tiempo, siempre necesaria.

2. Pitágoras.

La primera reflexión sistemática apunta a que las matemáticas ofrecen una clave para las leyes subyacentes de la naturaleza y corrobora que representan un culto místico que data del 600 al 400 a.C. El espíritu científico de Pitágoras (nacido alrededor del 570 a.C. en la isla de Samos), al igual que el de Aristóteles y el de Euclides, luchó con las viejas mitologías que se involucran en las matemáticas primitivas[19] . Para Pitágoras una buena parte de esa mística procede de antiguas concepciones teológicas, como la del *budismo zen*. La historia del budismo empezó hace dos mil quinientos años y los elementos del mismo se han conservado desde el siglo V a.C., es decir, desde la época de Zenón (n. el 450 a.C.), Pitágoras y Heráclito[20] hasta nuestro tiempo; el *zen* es un término japonés que procede de una escuela budista que se inicia en China y se traduce en su práctica normal como "meditación", término que implica por sí mismo la existencia de una "iluminación". En los sistemas de este budismo, existían los llamados *koan* que, en su origen, se refieren a diálogos entre maestro y discípulo, donde se predispone a este último a meditar en la solución de un problema insoluble. Los koan representarían paradojas que propiciaban la iluminación y hacían titubear la mente del discípulo creando las condiciones para que se liberara y llegara a un punto de vista (o más bien a uno nuevo). Un koan logra desarticular razonamientos lógicos y puede significar una pregunta sin aparente sentido. El primero de ellos es atribuido al Budha.
Una famosa paradoja zen citada en una obra de Douglas R. Hofstadter[21], involucra dos koan, en la que el maestro dice que uno de ellos es verdadero, aunque no sabe cual. Se trata de una paradoja perteneciente a las de la clase muy difundida de la *paradoja del embustero* de Epiménides, en la cual se

19 Esas matemáticas se refieren únicamente a la teoría de los números naturales (enteros positivos y el cero) y a las propiedades de los mismos.

20 El pensamiento del filósofo griego Heráclito (525-484 a.C.) se dirigía a que en el principio del mundo, el fundamento de todo estaba en el cambio incesante ("todo pasa", la realidad "es como un río que nunca permite sumergirse dos veces en la misma agua"), una posición radicalmente opuesta a la de su contemporáneo Parménides (finales del siglo VI a.C.), defensor del "devenir"; que niega todo como pura apariencia de ser".

21 Véase *Gödel, Escher, Bach* (Edit. Tusquets, Barcelona, 1979). En esta obra existen sorprendentes paralelismos ocultos entre los grabados de Escher y la música de Bach, que remiten al lector a las paradojas clásicas de los antiguos griegos y al teorema de Kurt Gödel, que causó estragos en la lógica matemática.

genera un movimiento donde la comprensión que tiene la mente de la verdad y la falsedad, "se pliega y se repliega". Hofstadter asegura que los dos koan (en realidad, es uno sólo) son como espejos recíprocos, en el sentido de que "un lado de uno es reflejo invertido del otro", y agrega además que los maestros zen dieron con un modo para salir del espejo. La noción de infinito plasmó la imagen de dos espejos obligados a enfrentarse mutua e indefinidamente. Es presumible que el extraño estado mental que se ocasiona, venga inducido por la citada paradoja del embustero de Epiménides, la cual fue nominada también por muchos "paradoja del autorreferente"[22].

3. La teoría de números y los pitagóricos.

Los pitagóricos se proclamarían amigos de la sabiduría y se encontraban en su tiempo orgullosos de haber penetrado en la estructura interna de los números. Pitágoras transmitiría a sus seguidores que algunas clases de números eran ciertamente fascinantes. Al igual que su maestro, los pitagóricos consideraron que "la matemática de los números es el modo de comprender el mundo". Su primera creencia fue que los números constituían la "esencia" de todas las cosas, y cuando se sintieron presa de una fortísima devoción por ellos, serían los primeros en hacer matemáticas. Suponían sobretodo que los comportamientos y propiedades de los seres podrían, a través de los números, ser "formulables matemáticamente"; e incluso creyeron que los números estaban dotados de propiedades espirituales. Para ellos, no existe nada como los números que revele algo de su propia naturaleza. Desde que los pitagóricos indagaron sobre los orígenes de los números, les expresarían una admiración sin límites. Ante el hecho de permitirles interpretar los fenómenos naturales, sus conclusiones fueron atribuir a los números la constitución de la naturaleza del Universo, la armonía en el ámbito musical y hasta la distinción de la procedencia de ellos, en base a dos elementos "impar" y "par" por su íntima concepción dualista (luz-oscuridad, izquierdo-derecho, femenino-masculino). Cuando se llevaron a cabo las operaciones de uso corriente sobre los mismos, se descubrieron nuevos tipos de números. Una de sus mayores glorias es que pueden ser contemplados como si fuese cada uno absolutamente distinto de

[22] Se sabe, que la iteración supone una realimentación que conlleva la continua reabsorción de lo que ocurre antes. Ocupa un lugar importante en la filosofía. Para el ordenador, las paradojas iterativas conducen al caos; para los seres humanos, se ha dicho que tienen el efecto contrario, el de llevar a una intuición creativa e incluso a la iluminación (para detalles, véase J. Briggs y F.D. Peat, *Espejo y reflejo,* Edit. Gedisa, Barcelona, 1990, cap.4).

los demás. Para un pitagórico cualquier número comparece poseído de una estructura propia, de un carácter peculiar. La individualidad de cada número asume su propia importancia, pero lo que en realidad sobresale, son las numerosas interpretaciones de los sistemas a los que da lugar. Algunos de estos sistemas en la teoría de números, como la del reino de los números primos, suministrarían una rica y poderosa fuente de ideas matemáticas especulativas. De trascendencia capital ha sido el concepto de números primos y números compuestos (un número primo es aquel que sólo es divisible por sí mismo y por el 1; un número se dice compuesto, si no es primo). Los primeros números primos del conjunto N de números naturales son 2, 3, 5, 7, 11, 13, y otros muchos más (adviértase que 2 es el "primer" número primo, aún siendo par, ya que es divisible por 2 y por 1; y por otra parte, que todo número par mayor que 2 no puede serlo). Es fácil determinar si un entero dado es primo o no lo es, porque en muchos lugares de la teoría de números surgen vías rápidas para distinguirlo[23] . Un número compuesto puede ser escrito como el producto de dos o más primos; por ejemplo, el número 12 se escribe como producto de los tres números primos 2x2x3.
Una observación acerca de todos los números primos y nó acerca de un número primo en particular, puede representar el significativo hecho de que cada número primo de la forma 4n+1 puede ser escrito de manera única como la suma de dos cuadrados.
Ningún listado que se haga de una sucesión de primos, puede ser completo. Siempre puede generarse un primo que no esté en el listado.
Las primeras contribuciones de lo que se conoce como teoría de números, fue desarrollada como una nueva disciplina de las matemáticas por el griego Diofanto de Alejandría (siglo III d.C.) que estudió asuntos numéricos concretos (conceptos fundamentales de la aritmética, reglas en la multiplicación y con los polinomios, ecuaciones diofánticas, resolución de ecuaciones lineales,…), antes que cuestiones generales. Después de Diofanto, la teoría de números quedaría estancada durante más de mil años, hasta que la retomara Fermat en el siglo XVII con descubrimientos importantes.
En el transcurso de la historia matemática, los números subyugaron a la mayoría de la gente durante siglos. P.M. Higgins, en su excelente libro (*Number Story*, Springer, London 2008), ofrece una narrativa deliciosa, que exalta la belleza y el misterio de los números, sus diferentes clases y su utilidad. F. Le Lionnais (1901-1984) señaló en un artículo, junto a una

[23] Los números compuestos se reconocen por carecer de alguna propiedad que los primos sí tienen (entre otras y por ejemplo, la de que un entero $n \geq 2$ es primo, si y sólo si n divide $(n-1)! + 1$ (Wilson).

colección de trabajos que había seleccionado de otros grandes matemáticos, en una obra del siglo pasado (*Las grandes corrientes del pensamiento matemático*, Eudeba Edit., 1962; edición original París, 1948), que "*el número* tuvo en la matemática clásica el mismo papel que *la célula en los organismos vivos*.[24]

4. Primos gemelos y otras clases de números.

Una vez que los griegos se apercibieron de la infinitud de primos que había en la sucesión de números naturales de N, clasificarían algunos tipos de números. Al no existir pares de primos consecutivos (excepto el primer par 2 y 3, ya que 2 era primo), encontraron muchas parejas de primos cuya diferencia era 2. A esos pares de primos cuya diferencia es exactamente 2, se denominaron *primos gemelos*; como, por ejemplo, 3 y 5, 5 y 7, 11 y 13, 59 y 61, 101 y 103, y muchas otras parejas mayores. Se conoce bastante menos de los primos gemelos, que de los primos comunes. De aquellos se ignoran aún muchas cosas, entre ellas, la de no saber si existe un número infinito de primos gemelos o bien si después de una determinada pareja de ellos, ya no hay alguno más. Además de esta importante clase de primos gemelos, también existen *primos primos*, los cuales son primos separados por cuatro números no primos. Los primos que están separados por seis números nó primos, son llamados *sexiprimos*. Se suele asignar la denominación de *semiprimos* a los que son suma o producto de dos primos, y de *casiprimos* cuando cada uno es la suma de un primo y un semiprimo (por ejemplo, 100 = 23 + 7. 11).
Los primos gemelos son bastante poco frecuentes. Entre el primer millón de números naturales, sólo hay 8169 parejas de primos gemelos. La pareja más grande de primos gemelos descubierta, tiene más de 50.000 dígitos.

Existe un tipo de números que define a cada uno de ellos como *número perfecto*, al que es igual a la suma de todos sus divisores; por ejemplo, 6=

---

[24] Por otra parte, I. Stewart, brillante matemático actual y autor de un buen número de celebradas obras de divulgación matemática, agrega en una de ellas (*Historia de las Matemáticas*, Ed. Crítica, Barcelona, 2002), que los primos son partículas indivisibles (como en la química lo fueron los átomos) de la teoría de números. Una característica fundamental de los números primos encara la perspectiva de que muchas cuestiones matemáticas de la teoría general de números, pueden resolverse en cuanto se hayan resuelto antes para los primos, ya que éstos tienen unas propiedades especiales que a veces hacen más fácil la solución de la cuestión.

1+2+3 y 28=1+2+4+7+14, los cuales son los primeros números perfectos[25]. Y dos números son *amigos*, cuando la suma de los divisores de uno es igual al otro.
Verdaderamente, la perfección o imperfección de un número, tenía un significado más real que el de su propia denominación. La adjunción de cualidades intrínsecas, como el de la devoción a los números, persistió hasta en la historia humana misma.
No se puede dejar de mencionar cómo sobrevino el citado problema sobre la existencia de una infinitud de primos gemelos. En 1849, A. de Polignac conjeturaría que, *para todo número par 2n, había infinitas parejas de primos cuya diferencia era 2n*, una conjetura íntimamente relacionada con la conjetura de Goldbach. El caso n=1, traduce la existencia de un número infinito de primos gemelos, esto es: *Hay infinitas parejas de primos gemelos p, p+2.* La conjetura de los primos gemelos es muy antigua y se remonta a los tiempos de Euclides. Hubo intentos de probarla, aplicando el siguiente razonamiento: Los números primos mayores que 2 son impares, y en la escala de números impares 3, 5, 7, … , se puede observar que ciertas parejas de números consecutivos, tales como 3 y 5, 11 y 13, 17 y 19, 29 y 31, y muchas otras más que les siguen (incluso desde el 97 en adelante), predisponen a estimar que el número de tales parejas es infinito. Nadie ha logrado demostrar esta conjetura.
En el año 2000 la mayor pareja de números primos gemelos conocida fue $1693965 \times 2^{66443} \pm 1$ y se debe a Le Barbera et al. En el 2007 se supo que la mayor sería 2.003.663.613 x 2.195.000 ± 1 (Vautier, Kilbas y Gribenko).
Un pionero resultado notable sobre primos gemelos se debe a Vigo Brun quien, con el uso de métodos de criba, probó que *la suma infinita de sus inversos es finita* (que apunta, nó a que haya un número finito de ellos, sino a que no pueden ser excesivamente numerosos).

5. La conjetura de Goldbach.

Podría afirmarse que, en numerosas ocasiones, la teoría general de números parece auto-estimarse como referencia de estudio de los números primos. Uno de los casos más interesantes involucra el conocido como *la conjetura de* Goldbach, que se remonta al siglo XVIII. Christian Goldbach (1690-1764), que fue quien formuló dicha conjetura el 17 de junio de 1742, era un

---

25 Euclides en el libro IX de sus *Elementos*, probó que si $2^{n+1}-1$ es primo, entonces $2^n(2^{n+1}-1)$ es perfecto. Dos mil años después, Euler demostró que el recíproco no se cumple para los pares, es decir: "un número par N es perfecto, si y solo si $N= 2^n(2^{n+1}-1)$ siendo $2^{n+1}-1$ primo. Para Pitágoras, la perfección numérica dependía de los divisores del número.

matemático prusiano aficionado e historiador, nacido y educado en Könisberg. La abundante bibliografía de su padre, un monje luterano profesor de historia de la universidad en esta última ciudad, que sería su primer maestro, le coadyuvaría a ampliar su nivel cultural. Estudió leyes y medicina, como asimismo algo de matemáticas. Mantuvo correspondencia regular con el eminente Leonhard Euler (1707-1783) (el mejor matemático del XVIII y el más prolífico de la historia), a quien mostraría en su primera carta su conjetura en la que afirmaba que "*todo número par mayor que dos es suma de dos números primos*". En diversas publicaciones se ha dicho que Euler en principio, trató esta carta de Goldbach con cierto desdén, considerando el resultado como trivial [26] . Desde que hubo examinado con detenimiento lo que este último le expresó, Euler quedó confiado en que la conjetura era cierta, si bien no pudo encontrar una demostración de la misma, la cual siguió abierta. En la vida de Goldbach destacaría sobremanera su relación desde muy joven, con célebres matemáticos del XVIII (siglo de las Luces) de la talla de G.W. Leibniz (1646-1716) y los de la dinastía de los Bernoulli[27]; pero muy en especial, la amistad que más adelante sostuvo con el propio Euler, motivada por la continua correspondencia que entablaron entrambos. Esta correspondencia representó sin duda, un poderoso estímulo para que Euler dedicara una más intensa atención a la teoría de números, una rama elemental de las matemáticas, aunque bastante difícil por estar sobrecargada de sorprendentes e intrincadas técnicas. Euler llegó a profundizar en cuestiones fundamentales de esta teoría, tanto la algebraica como la analítica, determinando su composición y suministrando métodos. A los problemas de dicha teoría, Euler dedicó alrededor de unos 150 trabajos.
La formulación de la conjetura de Goldbach comenzó a divulgarse en Inglaterra en 1770. Transcurrieron más tarde períodos de elevada y afanosa curiosidad para los matemáticos, alternados con otros (algunos duraron medio siglo) en que hubo esfuerzos baldíos que condujeron incluso a la indiferencia; sin embargo, desde que Euler se ocupara de la problemática de los números, esta teoría se encumbró para desarrollarse como una verdadera ciencia.

---

[26] No obstante, según muchos opinan, lo que conviene subrayar es que únicamente la irresolubilidad que en todo tiempo mantuvo y mantiene la conjetura que Goldbach formuló, sería una buena razón para que su nombre haya de ser siempre recordado en la historia de las matemáticas.

[27] Gracias a los intercambios de escritos que tuvo con J. Bernoulli (1667-1748) y sus hijos Nicolás (1695-1726) y Daniel (1700-1782), llegó a conocer una diversidad de problemas de la aritmética, en particular, sobre sumas infinitas.

6. Reflexiones sobre la conjetura.

Desde el principio, la conjetura de Goldbach aparentó ser un problema simple y luego por el contrario, sería considerado como uno de los episodios auténticamente trascendentales de la matemática. En lenguaje más estricto, desde el momento en que la conjetura se diera a conocer por Goldbach, llegó a ser tildada por los matemáticos hasta alcanzar los tiempos actuales, de conjetura *inexpugnable* entre los más importantes problemas antiguos abiertos y sobretodo, posiblemente el más difícil de la historia de la ciencia. Como antes se dijo, hasta ahora se mantiene sin resolver.

Para efectuar un análisis previo de la conjetura (y habida cuenta de que Goldbach veía a 1 como un primo)[28] , consideremos una lista de los números primos mayores que 2:

3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 81, 87, 89, 93,97, 101, 103, 107, 109, 113, …

La conjetura de Goldbach reflejó en todo tiempo la carencia de duda alguna de que, todo número par mayor que dos (o sea, 4, 6, 8, 10, …) que se escogiera de la sucesión de números naturales de N, fuera expresable como suma de dos primos, aserto que podría seguirse comprobando para números pares cada vez mayores.

Ahora bien, es comprensible que si se aplica un razonamiento "inductivo", podría darse fin a la conjetura de Göldbach, para hacer válida la afirmación de que *todo* número par (mayor que dos) es la suma de dos números primos. Sin embargo, el matemático no aceptaría esta conclusión como un *teorema* de matemáticas, a causa de no haber sido probado "deductivamente" de premisas aceptables; y se obstinó en continuar inmerso en la búsqueda de una prueba deductiva para demostrar la conjetura de Goldbach, aunque se diera el caso de que hubieran de pasar miles de años.

No está de más resaltar que la decisión de confinar la prueba matemática al razonamiento deductivo, fuera tomada por los griegos, quienes no sólo rechazaron los demás métodos de razonamiento, sino todo el conocimiento acumulado por egipcios y babilonios durante cuatro mil años, al fundamentarse sólo en justificaciones empíricas.

Es evidente que se tenía depositada demasiada confianza en la demostración por contradicción, puesto que la lógica ponía en entredicho que con aquella

[28] Una convención que posteriormente sería abandonada en la teoría de los números primos. En su *Algebra (1770)* , Euler no admitía al 1 como número primo.

dudosa argumentación, se dejara como probada la conjetura de Goldbach[29]. Era muy posible que no se encontrara modelo alguno y que a pesar de todo, esa conjetura fuese cierta. De hecho, la conjetura efectivamente se cumplía, pero quedaba claro que estaba estrictamente subordinada a la hipótesis de que "infinitos objetos se comportaban igual que un número finito de ellos" (existieron numerosos ejemplos del comportamiento del infinito, para dudar de la misma). Además, y por otro lado, si la hipótesis fuese equivocada, la paradoja de Russell, entre otras, constituiría uno de esos teoremas que no podría ni probarse ni refutarse[30].

Si se reflexiona sobre la conjetura y llamáramos "<u>pareja</u> (o <u>partición</u>) de Goldbach" a toda pareja de números primos expresada por cualquier número par, puede observarse que la conjetura nos dice solamente que para cada número par existe, <u>al menos</u>, una pareja de Goldbach, aunque no dice nada de que pueda haber más de una. Dicho de otro modo, lo que asegura la conjetura conlleva que, para cada número par podría existir <u>más de una pareja de Goldbach</u>. Esto es lo que sucede con diversos números pares como 18 =5+13=7+11, 22=3+19=17+5, o bien, 42=11+31=19+23=5+37, (por ejemplo), en la escala numérica de naturales de N.

Aún puede apreciarse algo más. Una vez sentado que la descomposición en suma de dos primos de cada par, no tiene por qué ser única y teniendo en cuenta el listado de números <u>primos</u> precedente, escribamos el desarrollo de la escala de descomposición de los números pares como suma de dos primos (incluyendo en su caso, la de haber varias), escogiendo la <u>primera expresión</u>

---

[29] Obsérvese que de la misma se desprende por ejemplo, que la cantidad de números pares considerado (que forman un subconjunto de los números enteros) son tan "numerosos" como estos últimos. Para el profano en particular, este resultado implica una contradicción, ya que una <u>parte</u> (el conjunto de los números pares) es tan grande como el <u>todo</u>. En la época precantoriana, matemáticos y filósofos se hallaban ante una noción imposible de imaginar (el infinito *actual*) y una proposición muy evidente ("el todo es mayor que las partes"). Para Cantor se trataba de una situación de números transfinitos, formando un sistema no contradictorio, que exigía *metafísica*; estrictamente, una metafísica del número. Para detalles, véase P. Thuilier, *La trastienda del sabio*, Ed. Fontalba, Barcelona, 1983.

[30] La paradoja de Russell y otras antinomias, pusieron de manifiesto que la lógica intuitiva podía conducir a un tipo de contradicciones que jamás se presenta en aritmética ni en geometría. La antinomia de Russell constituyó una contradicción dentro del marco de la mismísima lógica elemental. Para evitarla se podrían cambiar las reglas de forma que su argumento no fuera posible. En efecto, si en su contexto dividimos las clases en dos grupos, designando como clase <u>no normal</u> la que está constituída por todas aquellas clases en las que cada una se contenga a sí misma y como clase <u>normal</u>, aquellas que nó, un razonamiento nada complicado permite demostrar que si N designa simbólicamente todas las clases normales, se infiere que "N es normal, si y solo si, N es no normal" (véase para detalles, E. Nagel y y J.R. Newman, *La demostración de Gödel*, **ibid** , cap. 1.

de cada par como primer sumando el menor primo posible, y el segundo sumando con el primer mayor, a saber:
4= 2+2, 6= 3+3; 8= 3+5; 10= 3+7; 12= 5+7; 14= 3+11= 7+7 ; 16= 3+13; =5+11 ;18= 5+13= 7+11; 20= 7+13; 22= 3+19= 5+17 ; 24=5+19= 11+13, 26=3+23, 28=5+23, 30=7+23,32=3+29, 34=3+31, 36 =5+31, 38=7+31, 40= 3+37, 42= 5+37=11+31=19+23, … , 84=5+79= 23+61; … , 92=3+89, … ., 100=3+97, … .

En el listado presentado de este modo, se revela una situación confusa, más bien desconcertante, que induce a pensar que si la conjetura llegara a resolverse, lograría seguramente poner orden en esa imprevisible especie de caos. Al recorrer la anterior escala hacia números mayores, se reconoce que todo número par se puede expresar cada vez menos frecuentemente por una cantidad inferior de parejas de Goldbach, esto es, en la escala existen en principio parejas, como 5 y 7, 11 y 13 y otras más, que están separadas sólo por un número par; de igual manera, hay otras, como 73 y 79, que lo están por cinco números pares, y 86 y 87 por seis números pares. Si seguimos avanzando en dicha escala, ocurre que los números primos de las parejas de Goldbach aparecen situados cada vez menos próximos (nótese lo que sucede desde el número 8 hasta el 20 y más adelante en el 84=23+61, y en los que les siguen)[31].

Otra versión conexionada con esta última argumentación heurística, es la que sigue. Si se consideran los 100 primeros números del sistema N de los enteros, se encuentran 25 primos; entre 1001 y 1100 sólo hay 16, y entre los números 100.001 y 100.100 solamente se hallan 6. Esto es, al aumentar el recorrido hacia números más grandes, los números primos van apareciendo con menos frecuencia; en otras palabras la distancia media entre dos primos consecutivos se hace cada vez mayor. En ocasiones, hay intervalos arbitrariamente largos en los que no se ven números primos. Por otro lado, la separación mínima, obviamente es de dos, dado que siempre existe al menos un número entre dos números primos.

---

[31] Tras los años transcurridos desde John Milton (autor de *El paraíso perdido*) cuando usó la palabra caos, éste ha venido a significar desorden. Ahora bien, la extracción de orden de los dominios del caos, no resulta fácil. Después de unas especulaciones generales acerca del caos y del orden, P.J. Davis y R. Hersh, (*Experiencia Matemática,* **ibid**), haciendo referencia a la conjetura de Goldbach, acompañan (cap. 4) a una escala como la recién escrita (desde 4 a 100) correspondiente a la descomposición de números pares en suma de dos primos, un listado de ordenador desde 20882 al número 21000, para ratificar la separación o alejamiento cada vez mayor entre los primos (primero y segundo sumando de todo número par (como ejemplos, puede observarse en los listados respectivos que 100=3+97 y 21000=17+20983).

No se debe soslayar que durante una gran parte de su historia, la rama de investigación numérica trató el funcionamiento de las matemáticas, con escasas conexiones con el mundo real. La llegada del computador electrónico lo cambió todo. Las representaciones electrónicas de números naturales y otras diversas cuestiones que seguirían planteándose condujeron frecuentemente a la teoría de números. Una de las proposiciones del libro IX de los *Elementos* de Euclides afirmaría que "los números primos son más que cualquier multitud asignada de números primos", lo que en términos modernos significa que la lista de primos es infinita.

Trasladándonos a tiempos recientes, la conjetura de Goldbach sería investigada por una mayoría de teóricos numéricos[32] . Desde luego, sabiendo manejar hoy cualquier computadora, no hay dificultad en advertir que para cualquier número entero par mayor que 4, se podrían ir hallando todas sus parejas de Goldbach. El progreso científico técnico consiguió demostrar la veracidad de la conjetura para una cantidad cada vez más grande de números. Usando un eficiente algoritmo fue verificada por computador por Jörg Richstein en 1997, para todos los números pares menores que $4x10^{14}$. También sería comprobado con ordenadores en 2002 para todos los pares menores que $2x10^{16}$. En 2007, Oliveira y Silva había mejorado la cifra, y no obstante, se siguieron haciendo cálculos. Aunque solamente se había conseguido probar la conjetura hasta un determinado lugar (si bien cada vez más avanzado) en la escala sucesiva de pares, esto significó para muchos matemáticos que la conjetura tendría que ser considerada como cierta, ateniéndose a que hasta ahora no existe ningún computador que pueda seguir calculando hasta el infinito. Si la famosa hipótesis de Riemann[33] es cierta (un problema que a los matemáticos les gustaría resolver), esta última resultaría ser una consecuencia de la comprobación de la conjetura de Goldbach para todos los números pares inferiores a uno prefijado de antemano.

Debemos anticipar que alrededor de unos cien años anteriores a Goldbach, hubo algunos científicos que ya se habían planteado lo que se decía en la conjetura que luego formuló, como también de otra acerca de que "todo número impar era primo o suma de tres primos". Se supo después que dichos planteamientos, habían sido conocidos por el famoso matemático y filósofo francés R. Descartes (1596-1650) y por el inglés E. Waring (1734-

---

[32] Para valores pequeños de n, la conjetura de Golbach se podía verificar directamente. N. Pipping en 1938, tras un muy laborioso trabajo comprobó la conjetura hasta $n \leq 10^5$.

[33] Véase I. Stewart, *La Historia de las Matemáticas*, Edit. Crítica, Barcelona, 2008.

1798)[34]. A la vista de las indagaciones que los historiadores luego efectuaron, no sólo las primeras generaciones de científicos posteriores a Goldbach, sino también otras de las que siguieron, al parecer no tenían conocimiento de su conjetura[35]. Es sorprendente que no se encontrara información acerca de algún brillante matemático que la investigara, hasta que G. Cantor (1845-1918) empezó a interesarse en el problema de la descomposición de todos los números pares.

Desde que los trabajos de Euler incidieran en la problemática, estructura y metodología de la teoría algebraica de números, es decir, en aquella parte en que se podían utilizar recursos de la aritmética y del álgebra, sin acudir (dentro de lo posible) a la teoría de funciones y el cálculo infinitesimal, la demostración de la conjetura de Goldbach se resistió al enorme esfuerzo de una multitud de estudios que se desarrollaron para la determinación del número de particiones de todo entero par, a los que se habían añadido también otras técnicas, en particular las probabilísticas. Se generaron tiempos después un buen número de trabajos en el estudio de la conjetura, aplicando otros métodos más avanzados que recurrieron al análisis y a la tecnología de la información, los cuales reflejarían significativos descubrimientos de destacados matemáticos, aunque sin alcanzar una solución definitiva.

7. Las conjeturas débil y fuerte.

La conjetura de Goldbach de que *todo número par mayor que 2 es suma de dos números primos*, es conocida hoy en día con el nombre de *conjetura fuerte (*también *binaria* o *par).* Aún a sabiendas de que esta conjetura aún no había sido probada, la mayor parte de los matemáticos se encontraban convencidos de que el enunciado de la conjetura fuerte era muy probablemente verdadero, y sin embargo, muchos siguieron esforzándose en investigarla de manera independiente sin poder encontrar solución. Goldbach también conjeturó que *todo número entero mayor que 5, se puede representar como suma de tres números primos*[36] En la actualidad, esta última es denominada *conjetura débil* (también *ternaria* o *impar*).

De hecho, las dos conjeturas serían luego investigadas separadamente. Existieron a menudo intentos en demostrar directa e indistintamente, tanto la una como la otra.

---

34 Esta última conjetura aparece en su obra *Meditaciones algebraicas*.

35 La conjetura de Goldbach sería publicada por primera vez en 1843.

36 Euler afirmaría en los comienzos del cruce de comunicaciones con Goldbach, que éste le expresó en esos términos tal planteamiento en relación con su conjetura.

Se puede anticipar aquí que la conjetura débil sería deducible directamente de la conjetura fuerte. En efecto: La demostración no ofrece dificultad, si se parte de la veracidad de esta última. Si n es un número impar más grande que 3, se tendría n= 3+m (donde m es un número par mayor que 2); al propio tiempo, y según la conjetura fuerte, m será entonces la suma de dos primos, esto es, m =p+q, y por tanto n = 3+p+q.
A pesar de la precedente deducción directa de la conjetura débil de la conjetura fuerte, en la investigación que realizaron diversos matemáticos en el análisis independiente de las mismas, se encontraron representaciones de las descomposiciones con otro número de sumandos diferente al que anunciaba cada una en su respectivo enunciado, entre ellos por ejemplo, para la binaria con más de dos sumandos, y para la ternaria con bastante más de tres. Hubo pocas esperanzas de reducir a 3 el caso de mayor número de sumandos en la conjetura débil, así como a 2 lo que obviamente significaba la conjetura fuerte (ó conjetura de Goldbach).
También surgirían varios casos en los que algunos detractores se afanaron en construir contraejemplos.

8. El problema de la distribución.

Si se realiza una visión general retrospectiva, se reconocería enseguida que la teoría de números había persistido durante largo tiempo rodeándose de misterios, especialmente por estar contenida de numerosas e imprevistas sorpresas. Incluso la rama de la teoría referida al estudio de los números primos, seguiría en particular guardando secretos. Euclides y Eratóstenes (284-192 a.C.)[37] ya sabían de la existencia de un número infinito de primos. Es atribuida a Euclides la demostración siguiente presentada en la época griega: Se construye el producto de todos los primos de una lista sucesiva de ellos desde el 2 hasta un cierto p, y al nuevo número que se obtiene, se le suma 1. Se tiene así: n = (2x3x5x … x p) + 1, pudiendo suceder que n sea primo o no lo sea. En efecto, si n fuera primo, puesto que no es igual a ninguno de los números de la lista, se infiere que se ha construido un nuevo número primo. Si n no fuera primo, se podría escribir como producto de

[37] A Eratóstenes, geógrafo aficionado a las matemáticas, que también fue bibliotecario del famoso Museo de Alejandría, se debe en particular, un algoritmo conocido como la *criba de Eratóstenes*, una técnica para hallar todos los números primos menores que un número natural dado n. Consiste en formar una tabla con todos los naturales comprendidos entre 2 y n, en la cual se van tachando los números que no son primos, realizándose los siguientes pasos: a) Se señala el 2 (que es primo) y se tachan todos sus múltiplos; b) se va repitiendo el proceso, hasta que no queden números sin señalar o tachar; c) los números señalados son los primos (por ejemplo, entre 2 y 20, los primos son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19).

números primos; y en particular, cabe expresarlo como n = q x n´, donde q es un número primo divisor de n. ¿Puede suceder que q sea algún número de la lista? Nó, porque para los números de la lista, la división no es exacta. Ciertamente, si se divide n por q, el resto es cero; pero si dividimos n por cualquiera de los números primos entre 2 y p, se obtiene 1 como resto. De este modo, lo que se ha descubierto es un nuevo número primo que no figuraba en la lista, lo cual significa que no es posible elaborar una lista finita con todos los números primos. El razonamiento (lógico) impone que cualquiera que sea el camino que se tome, nos revela que toda lista escogida de números primos nunca tiene fin. Para los griegos, esto concluiría la prueba.

Conviene reflexionar acerca de lo que se sabe y no se sabe de la conjetura de Goldbach. En lo que atañe al problema de la distribución de números primos (una de las más primitivas y famosas cuestiones que quedaban pendientes), si se examina una escala de números pares de una sucesión de números naturales como la considerada en el parágrafo 6 anterior y se analizan las representaciones de todo número par como suma de dos primos, se advierte enseguida que el número de esas representaciones crece con n, esto es, para n suficientemente grande, el número de particiones de Goldbach crece, al crecer dicho número. Ahora bien, una vez que luego se supiera la existencia del enorme número de primos que iría apareciendo, se despertó en los matemáticos una fuerte expectación en saber cómo se distribuían los primos dentro del sistema N de los enteros positivos, como asimismo en las composiciones aritméticas que los enlazaban. Entender la distribución de primos dentro de ese sistema, fue entre los problemas antiguos uno de los más interesantes de la época.

Una vez que grandes matemáticos, como el francés A.M. Legendre (1752-1833) y el alemán C.F. Gauss (1777-1855)[38] dedicaran a comienzos del XIX algún tiempo al estudio de la distribución de los primos, se daría lugar a numerosos trabajos. Las dificultades pusieron en evidencia las irregularidades de la distribución. En los inicios del siglo XX, utilizando métodos de criba se demostró que los números representables como suma de dos primos, tienen una densidad positiva en la sucesión de números enteros, o sea, una proporción positiva de ellos era representable como suma de dos primos. Se conjeturaría entonces que el intervalo (o espacio) entre un

[38] Ningún problema ni discusión aparecería en la teoría de números, sin que se mencionase el nombre de Gauss. En su *Disquisitiones arithmeticae* hizo monumentales contribuciones a la teoría. En 1801 demostró el teorema fundamental de la aritmética: todo número natural se puede representar como el producto de números primos de una y sólo una forma. A la temprana edad de 14 años, Gauss conjeturó que cuando x crece ilimitadamente, el número de primos menores o iguales que x, llamado $\prod(x)$, es como x/log x.

número primo prefijado p y el siguiente primo mayor, debía ser igual al logaritmo natural de p. Desafortunadamente, el valor obtenido sólo sería cierto como aproximación.
Los matemáticos D. Goldston y C. Yildirin afirmaron luego que había un número infinito de espacios entre primos consecutivos, que son mucho más pequeños que el logaritmo natural de p, incluso aunque p tienda a infinito. Dos colegas suyos, al repasar su prueba, la invalidaron más tarde, al advertir que aquellos habían obviado un término de error bastante grande. Goldston y Yildirin, un par de años después, enmendaron el error y en la actualidad su prueba se considera correcta.
Para predecir la existencia de un número infinito de parejas de primos gemelos, el norteamericano T. Nicely se propuso repasar todos los números enteros hasta los cuatro trillones, pero el algoritmo utilizado condujo a un resultado incorrecto.

El examen de la distribución de números primos entre los naturales, resultó además ser algo caótica. Entre otras cosas, impediría encontrar una regla en los desarrollos de los números pares, que es precisamente lo que hace tan difícil la demostración de la conjetura de Goldbach.
Es preciso señalar aquí que en el siglo XVIII, junto a la creación de las premisas del álgebra, se encontraban diversos procedimientos de cálculo aritmético, entre ellos los métodos de la combinatoria elemental, además de los problemas teóricos de la aritmética, es decir, la teoría de números, con una buena parte de ellos agrupados en torno de una ciencia única que podía denominarse esencialmente aritmética "universal o general". Ya desde los comienzos de dicho siglo, el álgebra se mantuvo vinculada al desarrollo de los métodos de cálculo en una fase superior de la obra *Aritmética general* de I. Newton (1707) que había expuesto resumidamente en unas conferencias en Cambridge en los años 1673-1683. La temática algebraica de esa obra llamaría la atención de eminentes matemáticos (Lagrange, Fourier, ...), quienes elaboraron procedimientos de resolución numérica de ecuaciones, tanto exacta como aproximadamente. Una serie de monografías surgieron también, las cuales contenían una construcción sistemática del álgebra y en particular, la de la *Aritmetica universal* de Euler (1768-1769, edición en ruso). Ambas Aritmeticas, la general de Newton y la universal de Euler, dieron lugar a la formación del álgebra en el siglo XVIII, principalmente en las investigaciones teóricas enfocadas en torno a dos problemas: la resolubilidad de ecuaciones algebraicas en radicales y la demostración del teorema fundamental del álgebra. A este último dedicaron su atención J. le

R. D'Alembert (1717-1783) [39], J.L. Lagrange (1736-1783) y sobretodo Gauss y algunos otros.

En lo que se refiere a la distribución de los primos, destacaría sobremanera la cuestión de que nada se hubiera podido averiguar respecto de la posible existencia de algunas apreciables regularidades. La parte analítica en el desarrollo de la teoría de números, representó en primer lugar una etapa importante que tuvo su origen en los trabajos de Euler. Éste elaboró los métodos analíticos para la resolución del problema de resolución de la distribución de los primos en la sucesión de los números naturales, así como también para una serie de problemas aditivos. Esos métodos condujeron directamente a las relaciones entre las propiedades de los números enteros y las propiedades de las funciones analíticas. Las investigaciones que se realizaron para la búsqueda de una expresión analítica de una ley de distribución de los números primos, no condujeron a éxito alguno.

No obstante, apoyándose en las relaciones entre los productos y las series de potencias, Euler había dejado establecidas muchas proposiciones sobre el número de representaciones de los números enteros.

La mayoría de los matemáticos que habían depositado su confianza en que la conjetura de Goldbach era verdadera, no cesaron de insistir formulando preguntas del tipo ¿existe un número primo máximo o la sucesión de números primos es infinita al igual que la de los números naturales?, y más directamente, ¿de donde venía el conocimiento de que la conjetura fuera cierta, si se carecía de demostración? Su propia conclusión sería, "sólo en evidencias de carácter numérico", ya que siempre que se indaga su búsqueda, se encuentran más pares de primos gemelos. La realidad fue que algunas cosas se sabían y otras no. Se conocía por ejemplo y entre otras, que para todo entero n mayor que 1, existe siempre un número primo comprendido entre n y 2n, igual que existen series de números consecutivos, arbitrariamente largas, que no contienen ningún número primo. Sin embargo, aún se ignoraban cuestiones como la de si siempre puede haber un número primo entre n^2 y $(n+1)^2$ para todo valor de n^2, ni tampoco si existe una infinidad de números primos expresables en la forma n^2+1, siendo n un entero[40].

---

[39] Las primeras demostraciones de D'Alembert (1746) no fueron rigurosas, ya que contenían apelaciones explícitas a recursos del análisis matemático, que no aliviaban las dificultades de los algebristas.

[40] Véase P.J. Davis, *Experiencia Matemática*, **ibid, loc. cit.** para más detalles. Por otra parte y en particular, como consecuencia de una fortuita observación, se afirmaría que todo número primo excepto el 2 y el 3, tiene la forma 6n±1, puesto que aquel que no lo sea, es "par o múltiplo de 3"; mucho más sencillo hubiese sido mostrar que "existe una infinidad de primos de la forma 6n-1". De Bouvelles (en 1509) sugirió que al menos uno de los

Hasta que Euler no aplicara (como ya se ha recalcado) los recursos del análisis matemático, la conjetura precedente de Euclides de que en la sucesión natural de enteros se tienen infinitos números primos, no se avanzó nada prácticamente hacia una resolución más eficiente del resultado anterior.

No solamente hubo de tenerse en cuenta que había un extenso número de primos, sino más que nada la necesidad de ver cómo se distribuían en las progresiones aritméticas. Pronto aparecería la conjetura de que habría infinitos pares de primos gemelos cuya diferencia era 2, y de hecho la de que habría infinitos pares n, n+d si y sólo si d es par. Desde Euclides se dieron los primeros pasos con algunos planteamientos de resolución en las obras de Euler, en uno de los cuales enunció una proposición sobre cierto tipo de progresiones aritméticas infinitas, que contenía infinitos números primos, de la que Legendre no conseguiría dar una demostración[41].

Sólo sería en el año 1837, cuando el matemático P.G.L. Dirichlet (1805-1859) intentó probar la hipótesis de Euler. Dirichlet se ocupó principalmente de la distribución de los primos en las progresiones aritméticas. Generalizó el teorema del número primo para estas progresiones demostrando que *existen infinitos primos en todas las progresiones aritméticas ck+d (k= 0,1,2,...), siempre y cuando c y d no tengan divisores comunes.*

Diversas estimaciones heurísticas se enfocaron hacia la distribución probabilística de los números primos. Cuanto mayor fuese el número entero par, se hacía más "probable" que pudiera ser escrito como suma de dos números primos (como se enunciaba en la conjetura de Goldbach). Construida una tabla algo larga de números primos, se procedería a contar el número de ellos que se encuentran antes de un determinado lugar n. Llamando $\Pi(n)$ al número de primos que son iguales o menores que el número n, la razón $n/\Pi(n)$ proporcionaría la fracción de números primos delante de n (en realidad, la recíproca de dicha fracción). A tenor de los diversos cálculos que se efectuaron, no resultó difícil formular en el siglo XVIII, la conjetura de que $\Pi(n)$ era aproximadamente igual a n/ln , es decir

---

números 6n±1 era primo, una conjetura que, al irla comprobando fallaría cuando n=20 (para n=119, aquel sería 7 x 117, y para 121 igual a 11^2).

[41] Como es sabido, una progresión aritmética es una sucesión de números en la que cada uno de ellos se obtiene del precedente, por adición de un cierto número. La demostración de que en toda sucesión de esta clase existe una infinidad de primos, pertenece (en contraste con el álgebra) al campo de la teoría analítica de números.

un teorema sobre el número de primos[42], que no era más que el resultado formal del hecho:

$$\lim_{n\to\infty} \prod(n) / (n/\ln) = 1$$

En otras palabras, la probabilidad de que un entero de tamaño n es aproximadamente 1/ ln. Así, desde un punto de vista aleatorio, el número esperado de aquellas representaciones habrían de ser cercanas a $n/\ln^2$. Ahora bien, si se hubiese de ponderar la gran cantidad de los primos que aparecen, esto nos llevaría a una visión equivocada y nada rigurosa del problema, por desconocer la distribución de los primos en general.

Aunque la expresión relativa a n/ln proporcionaría una sencilla aproximación de $\prod(n)$, no resultó ser excepcionalmente buena. Los matemáticos se interesaron sobretodo en mejorarla.

Sucedieron también otros acontecimientos. A principios del siglo XIX se inició una serie de conjeturas más positivas para las estimaciones asintóticas de $\prod(x)$, como la del número de primos hasta x. Ya en la década 1798-1808, Legendre en su estudio de tablas de los primos, dedujo empíricamente la siguiente fórmula para $\prod(x)$ cuyos valores en el intervalo [2,x] son iguales a la cantidad p de números primos ($p \leq x$):

$$\prod(x) = x / \ln x - 1{,}08366$$

En 1848, el matemático ruso P.L. Chebishev (1821-1894) en uno de sus primeros trabajos sobre el problema de la distribución de los números primos, al hacer uso de métodos analíticos, mostraba que la fórmula de Legendre no era cierta y dedujo que el verdadero orden de crecimiento de la función $\prod(x)$ era el mismo que el de la función x/ln x. Chebishev dió además otras valoraciones precisas y muy en especial la que sigue:

$$0{,}92129 < \prod(x)/ x/\ln x < 1{,}10555 ,$$

[42] El descubrimiento de este teorema se remonta a Gauss (1792),quien predijo (recuérdese N. pie 38) que la densidad de los primos alrededor de x es, más o menos, 1 dividido por el logaritmo neperiano de x. El teorema del número primo afirma esencialmente que $\prod(x) \sim x/lx$, un teorema que está relacionado con la hipótesis de Riemann. La prueba rigurosa del mismo (1896) sería fruto de trabajos independientes de De la Vallée Poussin (1866-1962) y J. Hadamard (1865-1963), quienes demostraron el teorema límite:

$$\lim_{x \to \infty} \prod(x) / \int_2^x dz / lz = 1.$$

Selberg halló (1949) una demostración más elemental de esta ley asintótica.

uno de los resultados que causaría una enorme impresión en las investigaciones de la época. Al perfeccionar más tarde los métodos de Chebishev, varios matemáticos hicieron aproximaciones ulteriores más precisas, entre ellos Silvester (1892), Schur (1929), Brensch (1932) y A. Selberg (1949). Chebishev también encontró aproximaciones integrales de ∏(x) [43].

Nuevas ideas fueron aportadas por los matemáticos G.H. Hardy (1877-1947) y J. Littlewood (1885-1977), perfeccionando un método (el de "generatrices") de Euler, al conjeturar que el número de particiones ∏(n) de Goldbach se expresaba "asintóticamente" por el límite (para $n \rightarrow \infty$), de cierta fórmula funcional de ∏(n), la cual resultaba ser igual a 2H , donde H representa una constante de primos gemelos, conocida como "constante de Hardy) de valor H= 0,6601618158, una conjetura que no ha sido demostrada y se conoce como "conjetura de Goldbach extendida".

Una vez que Euler hubo establecido la conexión entre los números primos y la función zeta [44] (válido para Re z mayor que 1), Euler llegaría a utilizar otra demostración del resultado precedente, partiendo de una nueva definición de dicha función:

$$\xi(z) = \sum_{n=1} 1/n^z = \prod_{p=2} 1/(1-1/p^z) \quad \text{(n natural y p primo)}$$

El matemático y teórico numérico L.G. Schnirelmann (1905-1938), de la Universidad de Moscú, previó en 1930 la existencia de un número entero determinado C (que sería llamado "constante de Schnirelmann"), estableciendo que todo número natural n mayor que 4 – par o impar – podía escribirse como una suma de no más de 300.000 primos, o sea, $n= p_1+p_2+$

---

[43] Además de la problemática numérica, Chebishev se ocuparía luego preferentemente de la teoría de la probabilidad. Chebishev, que fue profesor durante más de treinta años en la Universidad de San Petersburgo, y su discípulo A.A. Markov (1856-1922), impulsaron el desarrollo de esa rama de la cultura, hasta elevarla al rango de disciplina matemática. Véase K. Ríbnikov, *Historia de las Matemáticas*, Edit. Mir, (traducida del ruso), Madrid (1987).

[44] Nos referimos a la función $\xi(z)$ de Riemann, una función de la variable compleja z, definida por una serie que converge absolutamente para todos los valores de z del semiplano Re z > 1, que viene dada por $\xi(z)= \Sigma\, 1/n^z= 1+ 1/2^z + 1/3^z + \ldots$, y en todo el plano complejo por prolongación analítica. Es conveniente añadir que la "identidad de Euler" enlaza los números primos y la función zeta de Riemann del siguiente modo:

$$\xi(z) = \prod_{n=1} \frac{(p_n)^z}{(p_n)^z - 1}$$

tomándose el producto a través de todos los números primos.

$\ldots+p_m$ ($n \leq C$). En 1931, con el refinamiento del método empleado (que incluía algunas limitaciones), Schnirelmann encontraría una estimación para su constante. Poseído al propio tiempo de un intenso interés por agrupar las conjeturas débil y fuerte (de Goldbach) en una sola, consiguió reducir el número de sumandos de la suma precedente, demostrando que era factible la expresión de cualquier natural de aquella mediante, a lo más, 300.000 primos, es decir $C \leq 300.000$ (cota superior de la constante de Schnirelmann)[45] . Este resultado llevó el problema al dominio de lo finito; un problema que había quedado pendiente desde que Euclides iniciara la andadura para llevar a "las matemáticas sobre el continuo a fundamentarse sobre la aritmética de lo discreto" [46] .
Diferentes matemáticos se dedicaron a mejorar el valor del número representativo de la constante de Schnirelmann.
Dicho número seguiría después siendo rebajado sucesivamente por una extensa serie de más aproximadas valoraciones[47] . Por otra parte, durante ese período, el matemático ruso I.M. Vinogradov (1891-1955) desarrollaría en los años 1930 un método que combinaba la técnica de formas bilineales con el de las sumas geométricas. Una vez que tuvo lugar un refinamiento de su método por otros matemáticos, Vinogradov probaría en 1937 que "todo número impar mayor o igual que cierto número N_0 (el cual sería llamado constante de Vinogradov). se podía expresar como "suma de no más de tres números primos impares". Vinogradov no logró deducir el tamaño de ese número; pero el trabajo que hizo[48] le facilitó la posibilidad de reducir la conjetura débil de Goldbach al de su comprobación para un número finito de casos. Para mejor interpretación de lo que se ha dicho, si nos remontáramos a una fecha más reciente como la de 1973, Deshouilliers

[45] La hipótesis de Riemann generalizada, resulta estar muy relacionada con el error que se comete al estimar el número de primos en las progresiones aritméticas. Si se supone que fuera cierta, el error que se cometería en dichas aproximaciones, sería pequeño. La aplicación de algunos métodos, entre ellos el de Hardy y Littlewood (conocido como "el método del círculo") a la conjetura de Goldbach, incluso asumiendo la hipótesis de Riemann, conduciría a una acumulación de errores significativos.

[46] Antes de la demostración de Schnirelmann, era concebible que a medida que se tomaran números de pares cada vez mayores, se requerirían más y más primos para representarlos (un número par podría ser tomado hasta un billón de primos, por ejemplo); se sabría que esto al no ser posible, que bastaría una suma de 300.000 primos (o menos).

[47] A raíz de que H. Weyl (1855-1955) destacara en 1916 la importancia de las sumas trigonométricas en la teoría analítica de números, se dio origen a un rico material de investigación en esta última, que condujo unos cinco años después a que Hardy y Littlewood consiguieran descubrir una vía de resolución para determinados problemas.

[48] Su más celebrado artículo sería *Some theorems concerning the theory of prime numbers* (1937).

obtuvo la cota 169, que redujo Klimov en 1975 al valor de 55. Luego, Vaughan la reduce nuevamente a 27 en 1977, y en el mismo año, Deshouilliers (et al.), logran obtener el valor de 26 (más adelante, en 1989, Chen y Wang conseguirían sustituir la expresión "suficientemente grande" por todo impar mayor que 10^{43000}, un número que se pudo rebajar a $2x10^{12}$). La mejor cota superior de la constante de Schnirelmann encontrada hasta 2008, la obtendría O. Ramaré en 1995, demostrando que C es, a lo sumo, igual a 6 [49], mejorando así la cota superior de 19 que consiguieron H. Riesel y Vaughan.

9. Puntualizaciones y otras acotaciones relacionadas con la conjetura.

Uno de los números primos más grandes conocidos fue descubierto con la ayuda de una computadora en Suecia. Se trata del número $2^{3217} - 1$. Los números de este tipo $2^p - 1$ con p primo, fueron estudiados en el siglo XVII por un monje matemático aficionado M. Mersenne (1588-1648) y desde entonces se denominan números *de Mersenne*. Tal vez exista un número infinito de primos de esta forma. Aún nadie lo sabe.
No hay un primo máximo, pero el mayor número primo conocido hasta septiembre de 2006 es $2^{32.582.657} - 1$, que tiene 9.808.358 cifras decimales.
Los únicos números perfectos hasta hoy, son de la forma $2^{k-1}(2^k - 1)$, donde 2^{k-1} es un número primo de Mersenne. Al parecer, Mersenne poseía un poderoso método para determinar qué valores de p hacen que 2^p-1 sea primo, pero nunca se supo hasta qué punto se pudo desarrollar tal método.
Otro tipo de números especiales que pueden o nó producir muchos primos, son los números de *P. de Fermat* (1601-1665)[50], los cuales tienen la forma $2^{2^n} + 1$. Para n= 0, 1, 2, 3, 4, los correspondientes números de Fermat son 3, 5, 17, 257 y 65537, los cuales son todos primos. Incluso para otros valores moderados de n, los números de Fermat son sumamente grandes. Para n>5 los números de Fermat llegaron a ser descomunales. Se desconoce si el número de Fermat para n=13, esto es, $2^{8192}+1$ sea primo. En realidad, no ha sido demostrado que $2^{2^n} + 1$ sea primo, para todos los valores positivos de n mayor que 4, según creía Fermat.
Fermat mantuvo una extensa correspondencia con Mersenne. Su influencia se puso de manifiesto, después de ser considerado como promotor de la teoría de números. Durante el siglo XVII, Fermat investigó problemas

[49] El mejor resultado "incondicional" para todos los números pares, se debe a Ramaré.
[50] El más famoso resultado de Fermat fue el teorema de enunciado: "La ecuación $x^n+y^n = z^n$ no tiene ninguna solución para exponentes enteros n>2 ", que dejó escrito en los márgenes de los ejemplares suyos de las obras de Diofanto.

matemáticos de la antigua Grecia, entre ellos la divisibilidad de los números y la búsqueda de divisores de un número dado. Como tema preferente se ocupó del análisis indeterminado de Diofanto, o sea de las soluciones de ecuaciones indeterminadas y de sus sistemas. La teoría de números en el siglo XIX fue impulsada gracias a los resultados de Fermat. La indagación de demostraciones, generalizaciones o refutaciones de los teoremas de Fermat fue la primera etapa investigadora de Euler[51] . Fermat llegaría a desafiar a otros matemáticos a demostrar una serie de teoremas, así como a resolver diversos problemas, entre ellos la búsqueda de fórmulas que generasen todos los números primos o al menos que tomaran valores primos.

Se hicieron muchos intentos para encontrar una fórmula algebraica sencilla que produjera sólo números primos. Nadie ha encontrado una fórmula que produjera números primos para todo n.

En 1938, T. Esterman (1902-1991) demostró que casi todos los números pares podían escribirse como suma de dos primos (en el sentido de que la fracción de números pares que así fuese escrita tienda hacia 1).

El matemático chino Jing Run Chen probó en 1967 que *hay infinitos primos, tales que p+q es, o primo o casiprimo*. Los experimentos con computador demostraron que la conjetura de Goldbach es cierta para todo número par hasta 10^{18}. El resultado más conocido fue obtenido por Chen en 1973, utilizando complicadas técnicas del análisis, demostrando que *todo entero natural par suficientemente grande es suma de un primo y un semiprimo (esto es, un primo o un producto de dos primos)*.

Este último resultado fue extendido por el matemático italiano Enrico Bombieri (1940-)[52] premiado con la medalla Fields en 1974 por sus trabajos en el campo de la teoría de números (por el que se había interesado desde los 13 años), y que tuvo su origen en la conjetura de Goldbach. El teorema denominado de Bombieri-Vinogradov fue de las principales aplicaciones del método de la criba amplia. Una de sus más profundas investigaciones la representa la mejora del teorema de Dirichlet en las progresiones aritméticas. Bombieri ampliaría más tarde sus mejores

---

[51] Cuando Goldbach diera conocimiento (en carta de 1729) a Euler, de que todos los números enteros de la forma dada como expresión de sus números, eran primos, Euler llegaría a probar (1732) que cuando n=5, el resultado 4.294.967.297 de dicha expresión no era un número primo, sino que se trataba de un número compuesto que podía ser factorizado como 641 x 6.700.417 (Véanse U. Dudley, *History of a formula for primes*, Amer. Math. Monthly 76 (1969) y M. Kline, *Matemáticas en el mundo moderno*, Edit. Blume, Madrid (1974), para más detalles).

[52] En 1976, E. Bombieri inventó la técnica conocida como "criba asintótica" (véase su artículo, *The asymptotic sieve*, Mem. Acad. Naz. del XL, 1/2, 243-269 (1976)).

resultados, desarrollando un teorema de densidad que requirió poderosos medios de teoría analítica de números, geometría algebraica y de otras ramas superiores del análisis.

Muchos trabajos de Euler fueron dedicados a la rama de la divisibilidad, la cual se convirtió en nuestra época en una teoría de las denominadas congruencias. Unas primeras referencias empíricas de Goldbach sobre las congruencias, provienen de un artículo suyo de 1717. No había utilizado símbolo alguno para señalar congruencias, un símbolo en forma de tres rayitas horizontales que introduciría Gauss (*Disquisitiones arithmeticae*, 1801) para la congruencia $a \equiv b \pmod{m}$. Se dice que el número b es un residuo (o resto del número a) al dividirse por m si $a = d.m + b$ para algún entero d, esto es, si la diferencia a-b es divisible por m. Los residuos de orden superior se refieren a potencias. Si existe un número x, y un exponente entero n tal que la potencia $x^n - b$ es divisible por n, se dice que b es un residuo de orden n de módulo m, que en notación de Gauss se escribe $x^n \equiv b \pmod{m}$, en el desarrollo de la rama que luego estableció. Euler (así como también Lagrange) requirieron en su estudio de la descomposición de números en suma de cuadrados, el desarrollo de una teoría de residuos cuadráticos $x^2 \equiv b \pmod{m}$, la cual, como se ha indicado, sería generalizada por Gauss para residuos de orden n.
Al ocuparse de los residuos cuadráticos, Euler descubrió (1722) la ahora ya famosa ley de reciprocidad, referida a que "dados dos números primos p y q, si al menos uno de ellos tiene la forma 4n+1 , entonces las congruencias $x^2 \equiv p$ (mod. q) y la $x^2 \equiv q$ (mod. p) son simultáneamente solubles; si ambos tienen la forma 4n+3, entonces la solubilidad de una de las ecuaciones se deduce de la no solubilidad de la otra" . Después de Euler, Legendre probaría la ley cuadrática de reciprocidad, si bien su demostración sería incompleta. Gauss dio ocho demostraciones de esta ley[53] . En la teoría de residuos cuadráticos se lograría realizar también un gran trabajo [54] Legendre encontraría (1808) una fórmula cómoda de escribir la "ley cuadrática de reciprocidad":

$$(p/q)\ (q/p) = (-1)^{(p-1/2)\,.\,(q-1/2)}$$

---

[53] Para más detalles, véase K. Ríbnikov, *Historia de las Matemáticas,* **ibib**, cap. 6.

[54] Ello fue motivado por una escuela soviética de la teoría de números, que sería encabezada por Vinogradov, quien fue director durante más de treinta años del Instituto de Matemáticas de la Academia de Ciencias de la URSS desde 1932.

$$\text{con el nuevo símbolo } (p/q) = \begin{cases} +1, & \text{si es un residuo cuadrático de módulo q} \\ -1, & \text{si no es un residuo cuadrático de módulo q} \end{cases}$$

Por el estrecho contacto de Goldbach con los hermanos Nicolás y Daniel Bernoulli, conocería algunos descubrimientos de ellos sobre la problemática de sumas infinitas. A Goldbach le subyugó durante mucho tiempo el campo de series numéricas de enteros[55], concatenadas con la denominada serie "armónica"[56]. Goldbach consiguió algunos resultados, desarrollando ingeniosas conjeturas[57]. En la obra que se cita, en su capítulo 2 acerca de "Variaciones eulerianas sobre temas de sumas infinitas", se exponen ejemplos y planteamientos de Goldbach relacionados con ideas y artículos de Euler, esto es, fórmulas asintóticas y estimaciones de la función zeta por este último, sumas de inversos de números triangulares, sumas de inversos de las potencias pares de los números naturales, y también algunos sobre la divergencia de la serie de los recíprocos de los números primos, entre otros.

10. Epílogo

Durante 25 siglos los matemáticos se acostumbraron a corregir errores para poder ir enriqueciendo su ciencia. Desde 1900 se encontraban muy satisfechos con esta última, al ser concebida como descripción aproximada de la naturaleza. Sin embargo, la incertidumbre y las dudas para predecir el futuro de las matemáticas, sustituirían luego a la certeza y la complacencia del pasado. Se descubrieron contradicciones calificadas de paradojas que

---

55 El estudio de una suma infinita ó serie numérica $\sum_{k=1} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ ocuparía a los matemáticos desde la antigüedad clásica. Algunos pensaban que si los términos (o sumandos) de la serie fuesen todos positivos, la suma total debería ser infinita; hubo no obstante otros, que confiaron en que si las sumas parciales se podían acotar por un número independiente de sumandos, la suma de los infinitos términos de la serie tenía que ser finita. Cuando se trata de una serie *geométrica* , si el límite de sus sumas parciales S_n (para $n \to \infty$) tiende a un número finito S, la serie es convergente. Las series no convergentes son denominadas divergentes.

56 La serie armónica es divergente, pero pueden existir subseries de ellas que sean convergentes.

57 Véase al respecto, la notable obra (bien documentada) de C. Sánchez y R. Roldán, *La conjetura indomable de Goldbach,* Edit. Nivola, Madrid (2008).

afectaron los fundamentos de su propia lógica. Los matemáticos se parapetaron entonces tras el formalismo y echaron mano de la teoría de conjuntos. Redujeron el análisis y la geometría a la aritmética y, en particular, a introducir números para conjuntos infinitos.

Si hoy en día, en la primera década del siglo que inicia el nuevo milenio, se tuviera que prever un futuro para nuestras matemáticas actuales, posiblemente cualquier teórico numérico no dejaría de añadir que hay que tener presente la sentencia que dejó escrita Euler en 1770: "Los matemáticos han intentado en vano descubrir algún orden en la sucesión de los números primos, pero tenemos muchos motivos para creer que hay algunos misterios en los que la mente humana nunca podrá penetrar".