

*El rincón de la calculadora gráfica*

## El radián

*Francisco Puerta García*

Siguiendo con la divulgación del uso de la TI-92, en esta ocasión voy a transcribir el desarrollo de una clase impartida por mi el pasado mes de abril a un grupo de 4º de ESO sobre el concepto de radián.

El radián es un concepto que es bastante extraño a los alumnos, o que por lo menos les cuesta asimilarlo, porque tienen que conjugar la idea de proporcionalidad entre arcos y radios asociada a la semejanza entre circunferencias, con el concepto de rectificación de un arco, y aprender a releer la fórmula de la longitud de la circunferencia como " $L$ " igual a " $2\pi$ " veces el radio. A mi entender, el módulo de geometría de la TI-92 (o cualquier software de geometría dinámica) es la herramienta ideal para trabajar conceptos de este tipo debido a la infinita variabilidad de las figuras que se pueden representar con ella y a la posibilidad de realizar medidas que varían dinámicamente y que se pueden transferir para dar lugar a nuevos objetos, como veremos a continuación.

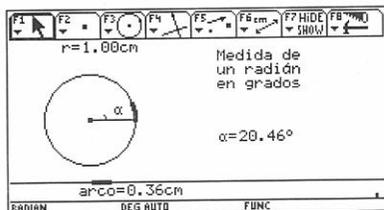
Estaba trabajando la trigonometría y les pedí a mis alumnos que leyeran en el libro la definición de radián e intentaran entenderla. Pasados unos días aparecí con el retroproyector para explicarla y justificarla con ayuda de la máquina. Mi principal objetivo es que los alumnos asimilen el concepto de radián de una forma significativa; es decir, no me basta con que sepan la definición de radián y cómo calcular su valor en grados sexagesimales, sino que tienen que crear una

*Esta sección ofrece a los lectores un foro en el que exponer ideas, consultar dudas y debatir planteamientos didácticos relacionados con el uso de la nueva generación de calculadoras gráficas avanzadas en la enseñanza de las matemáticas. Esperamos que participes enviando tus consultas o aportaciones a la dirección indicada al final.*

intuición de lo que es un radián, de su comportamiento y aspecto y saber por qué en un ángulo completo hay  $2\pi$  radianes.

El diálogo profesor-alumnos que ustedes van a leer dió lugar a muchas conexiones entre los diferentes conceptos que intervienen, y que a veces no quedan explícitos, y en él queda claro que el uso de imágenes con variabilidad ilimitada ayuda a visualizar más claramente conceptos que dependen de propiedades generales de las figuras, donde una sola instancia no es suficiente para desarrollar la intuición completa.

Empezamos viendo la siguiente pantalla



–Profesor: ¿Han leído la definición de radián en el libro?

Algunos si, pero no la recuerdan. La buscan y leen: “Un radián es la medida de un ángulo central tal que el arco que abarca en la circunferencia es igual al radio con el que ha sido trazada”.

–Prof: ¿Entonces, el ángulo  $\alpha$  medirá más o menos que un radián?

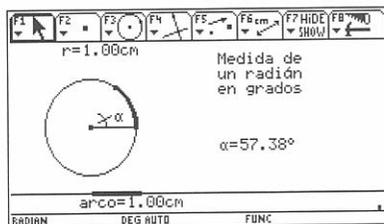
–Alumnos: Menos, menos...

–Prof: Vamos, pues, a alargar el arco para que mida lo mismo que el radio. ¡Fíjense en la medida en grados y en la longitud del arco!

Lo muevo hasta que se ve así

–Prof: Así que un radián, aproximadamente, deben ser unos  $57^\circ$ . Pero, ¿pasará lo mismo con una circunferencia más grande, ...o más pequeña?

Hay diversidad de opiniones entre la clase pero parece que están convencidos de que si, aunque no son capaces de argumentar el porqué.





Alargo la circunferencia *tirando* de ella y observamos que las medidas de arco y radio varían, manteniéndose iguales entre sí<sup>1</sup>, y la medida del ángulo no varía en absoluto.

Incido en el concepto de proporcionalidad de los arcos a los radios. Quedan convencidos visualmente de que el radián mide lo mismo siempre; sin que importe el radio con que se haya trazado el arco. La definición de radián está bien hecha; no depende del tamaño de la circunferencia que se use para medirlo.

Dejo la circunferencia con 1'5 cm de radio

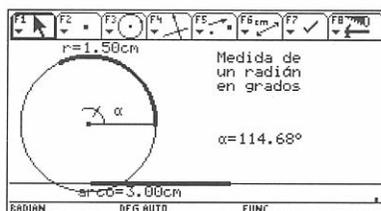
–Prof: Entonces, ¿cuántos grados tendrá un ángulo de dos radianes?

–Alum: Aproximadamente 114°.

– ¿Y el arco?

– 3 cm.

Lucho con las teclas del cursor para lograr medidas exactas (ellos me van jaleando cuando me paso o me quedo corto) y obtengo algo parecido a lo siguiente



–Prof: Así que está claro: un arco de 3 cm produce un ángulo de medida doble.

Hago un inciso:

–Prof: Insisto en que cuando se trata de arcos, la medida hay que tomarla *en redondo*, es decir, siguiendo la curva de la circunferencia y no en línea recta entre los extremos del arco.

Y mido la longitud de la cuerda del arco, para confirmar que es menor

<sup>1</sup>Salvo alguna centésima debida a la imposibilidad de situar puntos exactos en una pantalla.

que la medida de éste.

En la recta al pie de la pantalla se va *desarrollando* el arco para reforzar el sentido de *rectificación*.

–Prof: En el ángulo llano ¿cabrán tres radianes?

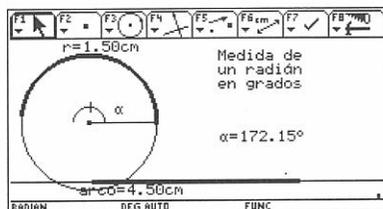
–Alum: Si.

–¿Pero exactamente?

Dudan.

Lo confirmamos con la pantalla

Se ve bastante claro que los tres radianes no llegan a completar el ángulo llano.



–Prof: Entonces, más o menos ¿cuántos radianes cabrán en el ángulo completo?

–Alum: Pues seis y sobrará un poquito.

–Prof: ¿Cuanto deberá medir el arco?



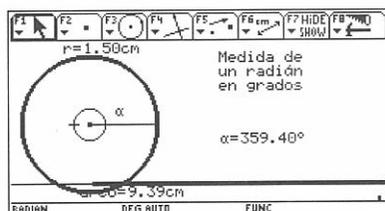
–Alum: 9 centímetros.

Muevo el cursor hasta que consigo esa medida para el arco

–Prof: ¿Cómo podremos calcular ese *poquito* que nos falta?

Trabajan con sus calculadoras tratando de ajustar los decimales sobrantes.

Sigo aumentando el arco para que complete la circunferencia, aunque no puedo llegar exactamente a  $360^\circ$  porque entonces la máquina mediría  $0^\circ$ .



Les pido que averigüen cuántas veces cabe ahora el radio en el arco. Dividen  $9'39$  cm entre  $1'5$  cm y obtienen  $6'26$ , un resultado muy próximo a  $6'28$ , pero claramente inexacto.

–Prof: ¿No podríamos usar alguna fórmula conocida para tratar de obtener un resultado **exacto**?

En seguida, algunos hablan de la fórmula de la circunferencia y otros han visto en el libro que  $180^\circ/\pi=1$  rad; pero no consiguen explicarme el por qué de esta, ni como usar la primera.

–Prof: Parece que están claras varias cosas:

1° Un radián mide aproximadamente  $57^\circ$ .

2° El valor de  $57.38^\circ$  que veíamos en la pantalla puede que no sea totalmente exacto

3° El libro dice que un radián es  $180^\circ/\pi$  y eso vale aproximadamente  $57.296^\circ$ .

–¡Busquen un razonamiento que nos permita llegar al verdadero valor (seguramente el del libro) y convencer a cualquier persona de que es así!

Les dejo tiempo para pensarlo y discutirlo entre ellos, y se va afianzando la idea de que hay que usar la fórmula de la circunferencia. Al cabo de un rato les ayudo un poco.

–Prof: Les voy a dar una pista: la longitud de la circunferencia es  $L=2\pi r$ . Aproximando sale  $L=6'28r$ . ¿Por qué no leer este producto como *veces*? Es decir, “La longitud de la circunferencia es  $6'28$  veces el radio”.

Piensan y debatimos la idea.

–Prof: ¿Qué quiere decir  $6'28$  veces?

Más o menos, todos me contestan que 6 veces el radio y  $0'28$  veces más, pero yo quiero precisar un poco más el significado del número.

–Prof: Tratándose de un producto ¿no podríamos interpretarlo como un tanto por ciento?

Piensen un poco y contestan que sí, que ese *poquito* que nos falta es un 28% del radio.

Llegados a este punto concluimos que en la circunferencia cabe el radio 6'28 veces y, por lo tanto, en un giro completo habrá 6'28 radianes. Así que bastará repartir  $360^\circ$  entre 6'28 radianes (entre  $2\pi$ ) para obtener exactamente cuántos grados corresponden a un radián.

–Prof: Ahora, dediquen los 10 minutos que nos quedan de la clase a contar por escrito los conceptos que hemos trabajado, y, especialmente, a redactar el razonamiento que nos lleva a que un radián equivale a  $180^\circ/\pi$ .

Les voy revisando lo que van escribiendo y quedamos en que el próximo día me entregan el resumen de la clase.

Francisco Puerta García  
fpgg@correo.rcanaria.es  
Instituto “Isabel de España”  
Tomás Morales, 39  
35003 Las Palmas de G. C.

## **Matemáticas y cultura**

*José Luis Montesinos*

*Jean Dhombres*

*José Miguel Pacheco Castelao*

*Silvio Maracchia*

*Emmanuel Lizcano*

## **Sistemas criptográficos de sustitución**

*Carlos Bruno Castañeda y Pino Caballero Gil*

## **Elementos de decisión estadística en bachillerato**

*José Miguel Rodríguez Morales*

## *El rincón de la calculadora gráfica* **El radián**

*Francisco Puerta García*