NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 102, octubre de 2019, páginas 107-121

Hablemos de Paenza

(Problemas Comentados LII)

José Antonio Rupérez Padrón y Manuel García Déniz (Club Matemático[1])

Resumen Soluciones de los problemas planteados en artículo anterior. Estrategias para resolución de problemas de organización de la información, ensayo y error, búsqueda sistemática y simplificación, tablas de doble entrada o diagramas. Hacemos una semblanza de Adrián Paenza, sus publicaciones y actuaciones, con citas pedagógicas y reflexiones extraídas de sus libros.

Palabras clave Resolución de problemas. Estrategias de organización de información, ensayo y error, tablas de doble entrada, diagramas y simplificación de situaciones. Semblanza de Adrián Paenza, con bibliografía y citas sacadas de sus publicaciones.

Abstract Solutions to the problems raised in the previous article. Strategies for solving problems of information organization, trial and error, systematic search and simplification, double entry tables or diagrams. We make a semblance of Adrián Paenza, his publications and showing, with pedagogical quotes and reflections extracted from his books.

Keywords Problem resolution. Strategies for organizing information, trial and error, double entry tables, diagrams and simplification of situations. Semblanza by Adrián Paenza, with bibliography and citations taken from his publications.

Siempre hay la posibilidad de cometer un error en nuestros artículos. En ocasiones, intencionados, para premiar al que encuentre el gazapo. Pero en esta ocasión fue, más que un error, un olvido: la dirección web de los problemas del Torneo.

Aquí está:

http://www.sinewton.org/web/index.php/actividades-mainmenu-28/torneo-2o-eso-mainmenu-45/347-torneo-35

Y los del Torneo de Primaria están en:

http://www.sinewton.org/web/index.php/actividades-mainmenu-28/torneo-6o-primaria-mainmenu-141/351-10-tp-4

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón** y **Manuel García Déniz**, jubilados del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna) y del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife), respectivamente. jaruperez@gmail.com / mgarciadeniz@gmail.com

PROBLEMAS

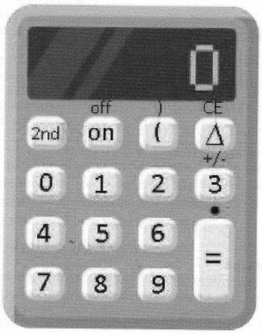
Y un error ortográfico en el apellido de Adrián **Paenza**, que aparecía como “**Paeza**”. Nuestras disculpas.

Siguen pendientes los problemas **INTERVENCIÓN QUIRÚRGICA** y **LA PARCELA TRIANGULAR**

También quedaron nuevos retos en el último artículo. Aquí están nuestras soluciones.

PRIMER RETO

UNA CALCULADORA PARA LOS MÁS JÓVENES



Para facilitar su uso a los jóvenes, un fabricante de calculadoras ha puesto en el mercado un modelo que sólo tiene una tecla de operación: Δ.

$$a\,\Delta\,b = 1 - \frac{a}{b}$$

Pero, **¿cómo vas a hacer las cuatro operaciones elementales básicas ahora?** Por supuesto, se pueden utilizar todas las teclas de la calculadora.

PROCESO DE RESOLUCIÓN

Comprender

Datos

Una calculadora especial.
Teclas para cada dígito del 0 al 1.
Tecla para encender y apagar.
Tecla IGUAL (=).
Tecla de segunda opción.
Teclas con dos opciones: encender/apagar (ON/OFF), 3/cambio de signo (+/-), única operación DELTA (Δ), borrar pantalla (CE).

Objetivo

Cómo hacer las cuatro operaciones elementales básicas con esta calculadora.

Relación

La operación DELTA (Δ) está definida como: $a\,\Delta\,b = 1 - \frac{a}{b}$

Pensar

Estrategias

Simplificar (casos más sencillos)

Ensayo y Error

Organizar la Información mediante técnica algebraica

Ejecutar

Al tratarse de un problema complejo, es necesario ver qué sucede con los elementos singulares (neutros) de las operaciones habituales.

Representaremos con **n** cualquier número. Utilizando la tecla de cambio de signo podemos siempre representar **-n**.

Puesto que cualquier operación del tipo ***x Δ 0*** dará un resultado con cero en el denominador, no las consideramos.

		b			
	Δ	1	-1	n	-n
a	0	1	1	1	1
	1	0	2	1 – 1/n	1 + 1/n
	-1	2	0	1 + 1/n	1 – 1/n
	n	1 – n	1 + n	0	2
	-n	1 + n	1 – n	2	0

Y entresacamos los siguientes resultados para posibles composiciones de operaciones:

0 Δ n = 1
n Δ 1 = 1 – n
1 Δ n = 1 – 1/n
-n Δ 1 = 1 + n

1 Δ -n = 1 + 1/n
-1 Δ n = 1 + 1/n
-n Δ -1 = 1 – n
-1 Δ -n = 1 – 1/n

El siguiente paso será ver qué pasa con dos números cualesquiera:

		b			
	Δ	a	-a	b	-b
a	a	0	2	(b – a)/b	(a + b)/b
	-a	2	0	(b + a)/b	(b – a)/b
	b	(a – b)/a	(a + b)/a	0	2
	-b	(a + b)/a	(a – b)/a	2	0

Nos quedamos con los siguientes resultados:

a Δ b = 1 – a/b = (b – a)/b

b Δ a = (a – b)/a

-a Δ b = (b + a)/b

b Δ -a = (a + b)/a

a Δ -b = (b + a)/b

-b Δ a = (a + b)/a

-a Δ -b = (b – a)/b

-b Δ -a = (a – b)/a

Aquí se observan ya algunas propiedades curiosas, especialmente en los signos.

Se aprecia que aparecen expresiones de sumas y de restas, pero siempre con denominadores. Para que queden solas las sumas y restas será necesario eliminar esos denominadores. Nos hará falta, pues, introducir un término inverso 1/n.

Después de varios ensayos, combinando las expresiones simples que hemos investigado, se llega a la siguiente expresión:

$(1 \Delta n) \Delta 1 = (1 - 1/n) \Delta 1 = 1 - [(1 - 1/n) / 1] = 1 - 1 + 1/n = 1/n$

Haciendo ensayos con esta expresión y las anteriores llegamos al cálculo de la suma:

$\{[(-b \Delta a)] \Delta [(1 \Delta a) \Delta 1]\} \Delta 1 =$

$= \{[(a + b)/a] \Delta [(1 - 1/a) \Delta 1]\} \Delta 1 =$

$= \{[(a + b)/a] \Delta [1 - (1 - 1/a)]\} \Delta 1 =$

$= \{[(a + b)/a] \Delta [(1/a)]\} \Delta 1 =$

$= \{1 - \{[(a + b)/a]/(1/a)\}\} \Delta 1 =$

$= \{1 - (a + b)\} \Delta 1 =$

$= 1 - [1 - (a + b)] =$

$= 1 - 1 + (a + b) =$

$= a + b$

De análoga manera, llegamos a la expresión para el cálculo del producto:

$\{a \Delta [(1 \Delta b) \Delta 1]\} \Delta 1 =$

$= \{a \Delta [(1 - 1/b) \Delta 1]\} \Delta 1 =$

$= \{a \Delta [1 - (1 - 1/b)]\} \Delta 1 =$

$= \{a \Delta (1/b)\} \Delta 1 =$

$= \{1 - ab\} \Delta 1 =$

$= 1 - (1 - ab) =$

$= ab$

Las expresiones de la resta y la división serán más sencillas a partir de las expresiones inversas de las ya encontradas. Quedan como tarea para casa.

Responder

Comprobar

Utilizaremos las expresiones anteriores para calcular la suma 3 + 5 y el producto 3 x 5.

3 + 5:

$\{[(-5 \Delta 3)] \Delta [(1 \Delta 3) \Delta 1]\} \Delta 1 = \{[(1 + 5/3)] \Delta [(1 \Delta 3) \Delta 1]\} \Delta 1 =$

$= \{[(8/3)] \Delta [(1 - 1/3) \Delta 1]\} \Delta 1 = \{8/3 \Delta [2/3 \Delta 1]\} \Delta 1 = \{8/3 \Delta (1 - 2/3)\} \Delta 1 =$

$= \{8/3 \Delta 1/3\} \Delta 1 = (1 - 8) \Delta 1 = -7 \Delta 1 = 1 - (-7) = 1 + 7 = \mathbf{8}$

3 x 5:

$\{3 \Delta [(1 \Delta 5) \Delta 1]\} \Delta 1 = \{3 \Delta [(1 - 1/5) \Delta 1]\} \Delta 1 = \{3 \Delta [1 - (1 - 1/5)]\} \Delta 1 =$

$= \{3 \Delta [1/5]\} \Delta 1 = \{1 - 15\} \Delta 1 = (- 14) \Delta 1 = 1 - (-14) = 1 + 14 = \mathbf{15}$

Análisis

No se descartan otras posibles expresiones para los cálculos pedidos por el problema.

Respuesta

La suma y la multiplicación con la extraña calculadora deberán hacerse presionando las teclas en la secuencia indicada en las siguientes expresiones:

Para la suma $\{[(-b \Delta a)] \Delta [(1 \Delta a) \Delta 1]\} \Delta 1 = a + b$

Para la multiplicación $\{a \Delta [(1 \Delta b) \Delta 1]\} \Delta 1 = a \cdot b$

SEGUNDO RETO

VACACIONES EN SILDAVIA

En Sildavia tienen un sistema monetario un poco extraño. Tiene monedas de tres tipos, que valen uno, cinco y doce sildares.

En las vacaciones, Víctor y Mario fueron hasta allí. En el último día, fueron a una tienda comprar una camiseta con la bandera del país.

Víctor pagó la suya con diez monedas, unas de "12 sildares" y otras de "1 sildar".

Mario utilizó sus últimas once monedas, siendo unas de "5 sildares" y las restantes de "1 sildar" para comprar la suya.

¿Cuál es el precio de una camiseta?

PROCESO DE RESOLUCIÓN

Comprender

Datos Un sistema monetario con monedas de tres tipos: 1, 5 y 12 sildares. Víctor y Mario compran, cada uno, una camiseta.

Objetivo El precio de una camiseta.

Relación Víctor pagó la suya con 10 monedas, unas de "12" y otras de "1". Mario utilizó sus últimas 11 monedas, siendo unas de "5" y las restantes de "1" para comprar la suya.

Diagrama Tabla. Lenguaje algebraico.

Pensar

Estrategias ORGANIZAR LA INFORMACIÓN de manera exhaustiva o utilizando una codificación algebraica. MODELIZACIÓN de la situación a través de GEOGEBRA, partiendo de la representación algebraica.

Ejecutar

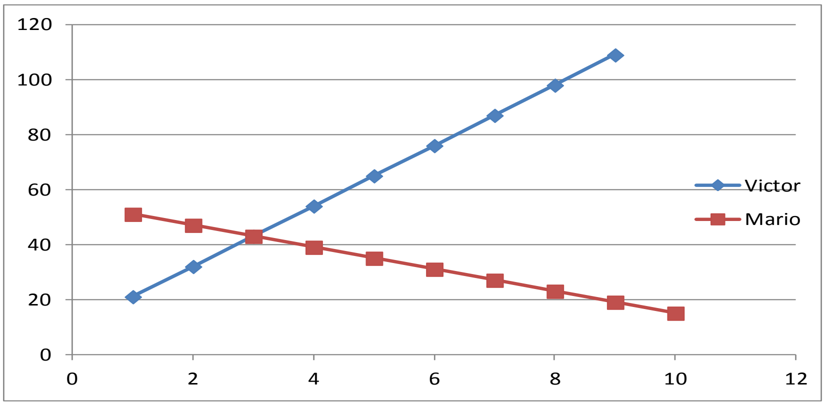
Mediante un procedimiento exhaustivo:

Establecemos una tabla simple con todas las variables del problema.

	Nº Monedas	1 sildar	5 sildares	12 sildares	Total	Resultado
	10	9		1	21	
		8		2	32	
		7		3	**43**	Coincide
		6		4	54	
Víctor		5		5	65	
		4		6	76	
		3		7	87	
		2		8	98	
		1		9	109	
	11	10	1		15	
		9	2		19	
		8	3		23	
		7	4		27	
Mario		6	5		31	
		5	6		35	
		4	7		39	
		3	8		**43**	Coincide
		2	9		47	
		1	10		51	

Podemos verlo gráficamente representando los totales de cada uno frente a la cantidad de monedas de 1 sildar que emplean:

1 sildar	Victor	Mario
1	21	51
2	32	47
3	**43**	**43**
4	54	39
5	65	35
6	76	31
7	87	27
8	98	23
9	109	19
10		15



En realidad, aunque aparenta ser un ensayo y error, se trata de organizar la información de manera exhaustiva. Contemplar todas las posibilidades de la compra para cada uno de los dos amigos y buscar las coincidencias. En este caso sólo hay una coincidencia y, por tanto, solución única.

Mediante un proceso algebraico:

Comenzamos identificando las variables del problema:

P = precio de una camiseta

x = nº de monedas de un sildar usadas por Mario

$11 - x$ = nº de monedas de 5 sildares usadas por Mario

y = nº de monedas de un sildar usadas por Víctor

$10 - y$ = nº de monedas de 12 sildares usadas por Víctor

Las relaciones del problema quedan expresadas de la siguiente manera:

$$P = 5\,(11 - x) + x \quad \rightarrow \quad P = 55 - 4\,x$$

$$P = 12\,(10 - y) + y \quad \rightarrow \quad P = 120 - 11\,y$$

Y entonces, $55 - 4\,x = 120 - 11\,y$, es decir: $4x = 11y - 65$.

Pero además, por el propio enunciado, cada uno de ellos tiene al menos dos monedas de cada tipo, y el problema debe tener solución única, pues no cabe el que la camiseta tenga dos o más precios diferentes.

y no puede ser inferior a 6 porque eso haría que x tomara un valor negativo, y $11y - 65$ debe ser un múltiplo de 4.

Contemplemos ahora la ecuación de esta manera: $11y = 65 + 4x$.

x ha de tomar valores igual o mayor que 2 y el segundo miembro de la ecuación ha de ser un múltiplo de 11.

Esta ecuación con dos incógnitas debe tener soluciones enteras según las condiciones estipuladas. Por tanto, se trata de una ecuación diofántica: $y = (65 + 4\,x) / 11 \wedge$ "y es entero".

Una manera de afrontar el problema puede ser usando esta propiedad para este tipo de ecuaciones diofánticas:

"Dada la ecuación $ax + by = c$, para que ésta ecuación tenga solución, c tiene que ser divisible por el máximo común divisor de a y b".

En nuestro caso la ecuación queda así: $-4x + 11y = 65$

Y al ser 4 y 11 primos ente si, el MCD (4, 11) = 1. Y c = 65 es divisible por 1, por lo que la ecuación admite solución

P R O B L E M A S

Con estos antecedentes elaboramos la siguiente tabla:

y	**11x – 65**		x	**65 + 4x**
6	66 – 65 = 1		2	65 + 8 = 73
7	77 – 65 = 12		3	65 + 12 = 77
8	88 – 65 = 23		4	65 + 16 = 81

Y la solución es x = 3 e y = 7.

Aunque también se puede resolver actuando sistemáticamente buscando esos valores, x e y, sin olvidar que han de ser inferiores a 11, y sin aplicar las restricciones vistas en las relaciones. Obtenemos:

x	**4x**	**65 + 4x**	**(65 + 4x) / 11**	y
1	4	69	69 no es múltiplo de 11	
2	8	73	73 no es múltiplo de 11	
3	12	77	77 / 11	7
4	16	81	81 no es múltiplo de 11	
5	20	85	85 no es múltiplo de 11	
6	24	89	89 no es múltiplo de 11	
7	28	93	93 no es múltiplo de 11	
8	32	97	97 no es múltiplo de 11	
9	36	101	101 no es múltiplo de 11	
10	40	105	105 no es múltiplo de 11	

Sólo encontramos una solución que concuerde con las condiciones del problema: x = 3.

Es decir, Mario compró la camiseta con x = 3 monedas de 1 sildar y, por tanto, con 11 – 3 = 8 monedas de 5 sildares, para un total de 43 sildares como precio de la camiseta.

Víctor compró la camiseta con y = 7 monedas de 1 sildar y, por tanto, con 10 – 7 = 3 monedas de 12 sildares, para un total, también, de 43 sildares como precio de la camiseta.

Mediante modelización con Geogebra:

Dejamos a nuestros lectores expertos en Geogebra que investiguen, descubran y nos envíen la forma de utilizar esa aplicación didáctica para resolver este problema.

<u>Solución</u> 3 monedas de doce y 7 monedas de uno para Víctor. 8 monedas de cinco y 3 monedas de uno para Mario. La camiseta costó 43 sildares.

Responder

<u>Comprobación</u>

Víctor pagó la camiseta con 10 monedas, 3 monedas de doce y 7 monedas de uno

→ 3·12 + 7·1 = 36 + 7 = 43

Mario pagó la camiseta con 11 monedas, 8 monedas de cinco y 3 monedas de uno

→ 8·5 + 3·1 = 40 + 3 = 43

En ambos casos, la camiseta costó 43 sildares.

Análisis: Solución única.

Respuesta:

Víctor pagó la camiseta con 3 monedas de doce y 7 monedas de uno.
Mario pagó la camiseta con 8 monedas de cinco y 3 monedas de uno.
La camiseta costó 43 sildares.

TERCER RETO

UN SENCILLO PROBLEMA DE COMBINATORIA.
(Adaptado de Adrián Paenza; Matemagia)

Con las letras de la palabra BECAD (dad una beca), se forman todos los anagramas posibles permutando sus cinco letras. Si colocamos las permutaciones ordenadas alfabéticamente, es decir: ABCDE, ABCED, ACBDE, ACBED, ACDBE, ACDEB, etc. ¿Qué lugar ocupará la palabra CEBAD? ¿Cuántas permutaciones son posibles con las cinco letras?

PROCESO DE RESOLUCIÓN

Comprender:

Datos: La palabra formada por las cinco primeras letras del alfabeto BECAD

Objetivos: (I) Calcular cuántos anagramas diferentes de cinco letras pueden formarse a partir de A-B-C-D-E. (II) Encontrar el lugar que ocupa la palabra CEBAD una vez ordenados alfabéticamente todos los anagramas.

Relación: Siempre son las mismas letras, pero colocadas en un orden diferente.

Pensar:

Estrategias: Organizar la Información.

Ejecutar:

Formar los anagramas y ordenarlos alfabéticamente. Cada anagrama es una permutación. Se utiliza el orden alfabético. Se puede utilizar como técnica la conversión de las letras en cifras y ordenar los números resultantes.

Hay 5! = 5·4·3·2·1 = 120 anagramas distintos que se pueden formar con las cinco letras de BECAD.

La palabra CEBAD está más cerca del final del conjunto que del principio, puesto que los que empiezan por A son 1·4·3·2·1 = 24, que son también los que empiezan por cada una de las otras cuatro letras. Así pues, las que comienzan por A y por B suman 48 y las que comienzan por D y por E otras 48.

De las 24 que empiezan por C, la cuarta parte -6-, continúan con A (CA---) otra cuarta parte con B (CB---), mientras que el tercer cuarto lo hace con CD--- y el último cuarto corresponde a CE---. Así vemos que CEBAD estará en el último cuarto, es decir, más cerca del último anagrama que del primero. Por ello vamos a calcular los anagramas posteriores a CEBAD en la ordenación.

1. Anagramas que empiezan por E: 4! = 24
2. Anagramas que empiezan por D: 4! = 24
3. Los que están después de CEBAD y antes de DABCE: CEDAB, CEDBA y CEBDA. Tres anagramas.

En total son 24 + 24 + 3 = 51, que hemos de restar del total de 120 calculado al principio:

120 – 51 = 69, y este es el lugar que ocupa CEBAD.

Solución**:**

120 anagramas. CEBAD ocupa el lugar 69.

Responder.

Comprobar:

Otra forma de enfocar la solución consiste en asignar una cifra a cada letra: A = 1, B = 2, C = 3, D = 4 y D = 5. Entonces a ABCDE le corresponde 12345, y CEBAD sería 35214; siendo DABCE el número 41235

Puede resultar más sencilla la ordenación trabajando con números y más fácil ver que entre 35214 y 41235 están 35241, 35412 y 35421.

Análisis:

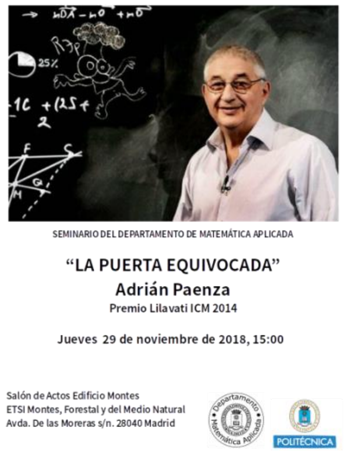
La solución es única.

Respuesta:

Hay 120 anagramas que comprenden algunos con significado (vocablos o palabras). El vocablo CEBAD ocupa el lugar 69 del total de 120 que tenemos.

Es sabido por todos nuestros lectores y aquellos que nos conocen personalmente nuestra rendida admiración por Martin Gardner. Nunca le dejaremos de estar agradecidos por todo lo que nos enseñó a través de sus artículos primero y con sus libros después. Añoramos su presencia, pero el material que nos dejó es tan rico que aún seguiremos utilizándolo durante mucho tiempo.

Pero, al hilo de este último problema, tenemos que hacer mención especial de ese otro monstruo de la divulgación matemática que es **Adrián Paenza.**



Este porteño, hombre de nuestra generación (la de los autores), **Adrián Arnoldo Paenza** nació en Buenos Aires (Argentina) hace 70 años. Matemático y profesor de matemáticas por la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales (UBA), es también un periodista y divulgador.

Su familia, de clase media, fomentó siempre su interés para que realizara actividades diversas: deportivas (patinar sobre hielo) o artísticas (tocar el piano). Con 14 años comenzó sus estudios en la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires, donde se doctoró en Matemáticas y fue profesor asociado. A los 16 años tuvo su primer trabajo como periodista. La pasión por el deporte lo acercó al periodismo deportivo y su pasión por las matemáticas lo acercó a la ciencia.

Sus libros han sido un éxito de ventas en la Argentina, en otros países de Latinoamérica y también en Alemania y España, donde se han editado algunos títulos. Asimismo, sus libros han sido publicados (o lo serán próximamente) en Rusia, Italia, República Checa, Brasil y Portugal.

Como periodista, se inició en 1966 en *La Oral Deportiva* de Radio Rivadavia. Entre 1986 y 1997 fue profesor asociado del departamento de matemáticas de esa institución. Ganador del Premio Konex en la categoría Periodismo Deportivo Audiovisual en 1997, ejerce el periodismo en diversos medios, y es conductor del programa *Científicos Industria Argentina*, galardonado con el Premio Martín Fierro en 2007, 2009 y 2011. Trabajó en las radios más importantes del país y en los cinco canales de aire de la Argentina. Fue redactor especial de varias revistas y colabora con tres diarios nacionales: *Clarín*, *Página/12* y *La Nación*. Actualmente es columnista especial de *Página/12*. En 1997 recibió el Diploma al Mérito Konex a Deportiva Audiovisual. En 2007 recibió el premio Konex de platino en la categoría «Divulgación científica».

Ha recibido otros muchos premios como divulgador matemático y periodista deportivo.

A la vista de sus extensos agradecimientos en la introducción de sus obras, hemos de considerar que mantiene una excelente relación con su familia, compañeros y amigos.

Desde hace 35 años, reside la mayor parte del tiempo en la ciudad de Chicago, Estados Unidos.

Adrián Paenza como destacado matemático, periodista y divulgador de las Matemáticas, autor de libros maravillosos como la serie "Matemáticas... ¿Estás ahí?", expresa alguna de sus ideas sobre las Matemáticas y su docencia, recogidas de la obras citadas, dignas de ser difundidas y aplicadas en nuestro quehacer diario. (Datos obtenidos de wikipedia)

Como muestra reflejamos algunas referencias como las siguientes:

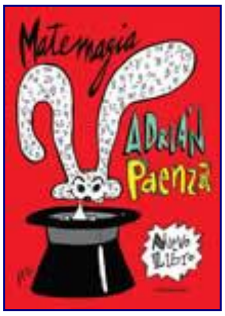
- *Mi experiencia como docente me permite decir que nuestra responsabilidad es la de transmitir ideas en forma clara y gradual.*
- *Uno necesita encontrar complicidades en el alumnado, mostrar que nos importan. Que, en todo caso, sin ellos, sin alumnado, no hay docencia, ni profesorado.*

- *Estimulemos al alumnado a preguntar todo el tiempo. No todos tenemos los mismos tiempos para entender. Ni siquiera hay garantías de que lo que entendimos hoy lo entendamos mañana. Nuestra tarea, la de los docentes, es prioritariamente la de generar preguntas, o sea, motivar a los alumnos a que ellos se hagan preguntas. Nuestro desempeño no será satisfactorio si sólo colaboramos en mostrar respuestas.*
- *Es posible que parte de la matemática que se produce hoy no resuelva situaciones del presente, pero podría resolver las del futuro. Hay muchos ejemplos en ese sentido.*
- *En cualquier caso, el placer pasa por pensar, por dudar, por "entretener" en la cabeza un problema que no sale y aprender a coexistir con algo no resuelto.*
- *Debemos quebrar las competencias estériles. Nadie es mejor persona porque entienda algo, ni porque lo haya entendido más rápido. Ni peor, si no entiende. Estimulemos el esfuerzo que cada uno pone para comprender.*

- *La teoría tiene que estar al servicio de la práctica. Primero están los problemas y mucho después la teoría, que (en todo caso) se supone que ayuda a resolverlos. La idea es aprender a pensar, a plantear y a resolver problemas.*
- *No hemos de someter a alumnado a la supuesta autoridad académica del docente. Si el alumno no entiende, el docente debe motivarlo a preguntar, a porfiar, a discutir hasta que o bien entienda, o bien nos haga advertir que ¡quienes no entendemos somos nosotros!"*

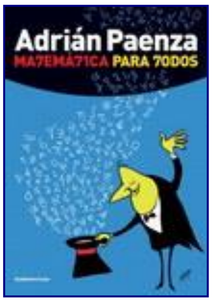
Sus libros son un diálogo con el lector, donde frecuentemente pide (¿exige?) pausas de reflexión, de análisis, dando la oportunidad de que el lector recapacite sobre lo planteado antes de seguir leyendo. Aquí tenemos alguna de las reflexiones que expone en su libro "LA PUERTA EQUIVOCADA":

"(Para resolver este problema de frases verdaderas y falsas) no hizo falta tener ningún tipo de conocimiento previo. Sólo se trató de hacer un análisis exhaustivo de todas las posibilidades, y con eso fue suficiente para deducir la respuesta. La vida está llena de problemas de este tipo en los que uno debe plantearse diferentes escenarios y luego determinar cuáles son posibles y cuáles no. La matemática llega en auxilio para dar un soporte lógico/técnico que muchas veces permite decidir qué es lo que está bien y qué es lo que está mal." (página 273)



"…La satisfacción que yo siento cuando descubro cómo resolver un problema nunca surge de leer lo que hizo otro. No quiere decir que muchísimas veces no me haya quedado otra alternativa, pero prefiero aprender a coexistir con la frustración durante un tiempo y pagar ese precio si al final logro que se me ocurra a mí. Ese instante en donde es uno quien encuentra el camino que lleva a la solución, ese momento en donde uno pasa de no entender a sí entender, es impagable, y es por eso que no me canso de escribirlo y de compartirlo para invitar a quien tiene un problema de cualquier tipo a que no se dé por vencido en el intento. Hágalo hasta donde pueda. La recompensa intelectual y lo que aporta a la autoestima merecen su dedicación y esfuerzo." (página 280)

"(En algunos problemas) el objetivo no es otro que entrenar nuestra capacidad lógica para elaborar estrategias. … La satisfacción que produce compararse a uno mismo desde el momento en el que toma el primer contacto con



la situación hasta que advierte qué es lo que hay que hacer para resolverlo es incomparable. De hecho, es una buena forma de conocer nuestras propias capacidades que permanecen dormidas, latentes, escondidas... elija el adjetivo que prefiera. Por eso, más que la solución propiamente dicha, lo que vale la pena es el trayecto, la ruta y el descubrimiento que implica cada paso." (página 287)

"No sé qué pasó a usted, pero créame que a mí me fascina la capacidad que tenemos los humanos de encontrar un hecho escondido, oculto y que parecía inalcanzable, usando simplemente la herramienta más poderosa que tenemos: el cerebro." (página 290)

"...Muchas veces nos embarcamos en establecer fronteras artificiales que en la vida real no existen. Me explico: uno aprende en el colegio/escuela a resolver problemas de matemática, de física, de química, de biología, de geología, etc., pero los problemas en la vida cotidiana no vienen con una etiqueta que los separa o distingue. Entonces, cuando llega el momento de enfrentar una situación cualquiera en donde se requiere pensar, no sirve –en general– tratar de recordar lo que uno estudió, sino de crear y buscar alternativas de solución desde cualquier ángulo posible." (página 302)

"¿Qué le pasó a usted?, ¿se le ocurrió enseguida?, ¿hubo algo que le hizo sospechar que esas áreas tenían que ser iguales?, ¿cómo pensó el problema? No sabe cómo me gustaría poder estar junto a usted para escuchar sus reflexiones. Seguro que eso me ayudaría muchísimo para educar mi percepción." (página 320)

"La única gracia que tiene este tipo de problemas (análisis de un juego) es motivarlo para bucear en algún otro lugar de su cerebro, llevarlo/la –eventualmente – por sitios que usted no exploró... La idea final debería ser: mejorar su capacidad para razonar y elaborar estrategias. (página 324)

"Una vez más, es muy poco probable, por no decir imposible, que aparezca alguna razón por la cual uno tenga que (hacer estas cosas), pero esa no es la idea. La idea es mostrar cómo somos capaces de elaborar diferentes tipos de estrategias para resolver problemas. Puede que éste no surja nunca en la vida cotidiana de ninguna persona que usted y yo conozcamos, pero sí estoy seguro de que tanto entrenarse y pensar en problemas que requieran la elaboración de estrategias, uno desarrolla capacidades para la vida cotidiana que no tendría si no las practicara." (página 336)

Un par de enlaces a sus actuaciones divulgativas publicadas en "youtube". A partir de estos se pueden ver otros vídeos.

https://www.youtube.com/watch?v=V33U1OsFVnQ

https://www.youtube.com/watch?v=C342mLcbcd4

Libros del autor Adrián Paenza:

- *Matemática... ¿Estás ahí? (2005)*
- *Matemática... ¿Estás ahí? Episodio 2 (2006)*
- *Matemática... ¿Estás ahí? Episodio 3,14 (2007)*
- *Matemática... ¿Estás ahí? Episodio 100 (2008)*

- *Estrategias (2016) Matemática… ¿Estás ahí? La vuelta al mundo en 34 problemas y 8 historias (2010)*
- *¿Cómo, esto también es matemática? (2011)*
- *Matemáticas para todos (2012)*
- *Matemagia (2013)*
- *La puerta equivocada (2014)*
- *Detectives (2015)*
- *En Robotilandia pasan cosas raras. 10 desafíos matemáticos para chicos (2016)*
- *La matemática del futuro (2017)*
- *El que pierde gana. 10 desafíos matemáticos para chicos (2017)*
- *Matemática maravillosa. 15 desafíos asombrosos para pensar distinto (2017)*
- *¡Un Matemático Ahí, Por Favor! (2018)*
- *Festival matemático (2018)*

Los libros de matemática recreativa publicados por Adrián Paenza se encuentran disponibles para su descarga gratuita en la web del Departamento de Matemática de la Facultad de Ciencias Exactas y Naturales de la Universidad de Buenos Aires:

http://cms.dm.uba.ar/material/paenza.

Pero no olvide que esa disponibilidad por parte de Paenza debe ser contrapesada por la compra de alguno de esos libros en formato papel. Descargue aquellos que no pueda encontrar en la librería. Compre aquellos que encuentre, léalos, disfrútelos y trabájelos. No se arrepentirá.

Y un par de retos (de Paenza, ¡faltaría más!) que proponemos para que ustedes practiquen y nos envíen sus razonamientos y soluciones.

Los dos primeros problemas los hemos adaptado un poco, más como juego que para enmendar la plana al maestro. Esperamos nos disculpe por ello. El tercero es un clásico:

1. Las guardias de recreo

Un centro escolar a principios de los años setenta del siglo pasado. Un grupo de cuatro profesores, a quienes voy a llamar A, B, C y D, decidieron encargarse de las guardias en los recreos del colegio. El encargo se hacía de manera semanal, pero con algunas condiciones que establecieron entre ellos.

Estas son las cuatro condiciones que decidieron cumplir:

- Los días en los que hacía guardia A, no la hacía B.
- Los días en los que hacía guardia B también la hacía D, pero no la hacía C.
- Los días en los que hacía guardia D, también la hacían A o B (o incluso los dos).
- Nunca hubo dos días iguales, es decir en donde se repitieran los profesores que salieron al patio de recreo para hacer la guardia.

En los siete días de la semana, ¿cuántos días estuvo de guardia D y con quién (o quienes)?

2. Inicio de curso

Existe la costumbre al principio de curso de pedir al alumnado que aporte el material suficiente para trabajar durante el curso. Se deposita en la clase y, a medida que se va gastando, se surten de él los alumnos que lo han aportado. El profesor a veces, previendo que habrá alumnos que no puedan aportar todo el necesario, pone de su bolsillo o del presupuesto escolar de aula una cierta cantidad de material básico. Supongamos que usted, profesor entró en un kiosco y compró tres tipos de materiales: lápices, bolígrafos y gomas de borrar. Juntando todo lo que compró, se llevó 30 cajas por las que pagó 30 euros. Se sabe, además, que compró por lo menos una caja de cada producto.

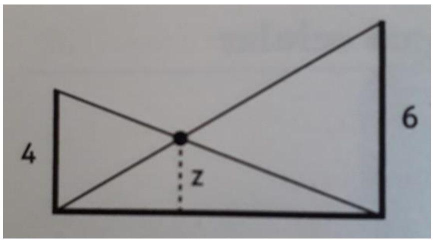
Cada uno de los productos venía envasado en su propio paquete y los precios por unidad estaban distribuidos de la siguiente forma:

a) Cada caja de bolígrafos costaba tres euros,
b) Cada caja de lápices costaba dos euros, y finalmente,
c) Cada caja de gomas de borrar costaba 50 céntimos.

¿Es posible determinar cuál fue la distribución de lo que compró? Es decir, ¿es posible determinar cuántas cajas de cada producto se llevó a su aula?

El que sigue es un problema clásico, que en la forma que Adrián Paenza lo presenta o en la que dando z se tiene como incógnita una de las alturas, se encuentra en muchos libros de geometría. Por ello lo trasladamos tal cual lo presenta su autor, solicitando de nuestros lectores que nos hagan llegar las variantes que conozcan. ¡Colabore hombre! ¡o mujer!

3. Torres de telefonía celular



Suponga usted que hay dos torres de telefonía celular. Estas torres se erigen en forma vertical. No importa la distancia que hay entre una y otra, pero lo que sí se sabe es que una mide seis metros y la otra cuatro.

Del extremo superior de cada una, sale un cable que llega hasta la base de la otra. Obviamente, esos cables tienen que cruzarse en alguna parte (ver Figura 1):

¿Puede deducir usted a qué altura del piso se cruzan? Mirando la figura, el problema consiste en determinar cuánto mide “z”.

Y hasta aquí llegamos. Terminamos con nuestro mantra particular: resuelvan los problemas, singulares y alejados de los cotidianos; utilícenlos con los alumnos y, sobre todo, aporten sus comentarios a la revista, sus soluciones e, incluso, nuevas propuestas. O, simplemente, cuéntennos lo sucedido en el transcurso de la clase en que probaron el problema. Queremos pensar que nuestras propuestas tienen uso en el aula. Eso nos alegraría mucho y también al resto de lectores. Nos repetimos: vamos, anímense… ¡Si es **divertido**!

Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera de la próxima edición de la revista ***NÚMEROS***.

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**