RESOLUCION DE PROBLEMAS MEDIANTE ECUACIONES : ASPECTOS METODOLOGICOS (y 2).

M. Fernández Reyes
C.P. "Punta del Hidalgo" (Tenerife)

(Este trabajo fue presentado como Comunicación en las III Jornadas Nacionales sobre Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas, celebradas en Zaragoza en Marzo de 1983)

RESUMEN DE LO ANTERIOR (NUMEROS,6)

En la primera parte de este trabajo sostenía que el prestar una gran atención a la enseñanza del lenguaje simbólico,desde los primeros niveles de la E.G.B.,ofrece las siguientes ventajas :

. Púeden abordarse,con un tratamiento único,una serie de cuestiones que generalmente se exponen - o al menos,así son captadas por los alumnos - como diferentes e inconexas.

. Permite iniciar antes,temas que tradicionalmente se reservan para los últimos niveles alegando que requieren una mayor capacidad de abstracción,cuando,tal vez,el no poderse tratar antes con garantía de eficacia se deba a que,siendo difíciles de explicar y entender en el lenguaje ordinario,no dispone el alumno de otro que los clarifique y concrete.

Añadía,además,que este tratamiento simbólico-generalizador debe realizarse con base en unos pocos conceptos ;pero que el niño ha de llegar imprescindiblemente al fondo de ellos. Y que esta interiorización y dominio sólo pueden alcanzarse cubriendo previamente una etapa manipulativa,eurística (manejo y construcción de material adecuado,proposición y dirección de pequeñas investigaciones,etc.)

En conclusión,creo que la enseñanza del lenguaje matemático,prudentemente graduada y dosificada,es la mejor vía,si no la única,para estructurar y hacer asequible la asignatura. Y empleo el término"estructurar" para recordar que este fue el propósito de los creadores del moderno enfoque de la Matemática y de su enseñanza. Buen propósito que,lamentablemente,no hemos sabido llevar a término ni los "sabios" paridores de los programas oficiales,ni las editoriales -siempre ávidas de dinero-, ni los que,pese a todo,tenemos la obligación de ENSEÑAR. Y mientras,el fracaso escolar ha llegado a ser aún más agudo que cuando los conocimientos elementales de Matemáticas se dividían en tres bloques sin comunicación : Aritmética,Algebra clásica y Geometría euclídea.

Se impone,pues,el que nos dispongamos seria y definitivamente a remediar esta situación.

En esta modestísima aportación,donde no pretendo aleccionar a nadie,expongo un método de trabajo que constantemente estoy sometiendo a pruebas e intentando mejorar. Por constituir un tema central,tanto en E.G.B. como en 1º de F.P. y B.U.P.,donde confluyen los demás,el que lleguemos a elaborar una metodología idónea puede facilitar en mucho la labor del profesorado de los niveles anteriores,que tendría entonces unos objetivos a alcanzar muy definidos.

No perdiendo nunca de vista las consideraciones anteriormente expuestas,estoy actualmente desarrollando el tema en cuestión,con las variantes que cada grupo de alumnos exige,como sigue :

PROBLEMAS PARALELOS

La indicación de todo el proceso de resolución de problemas puramente aritméticos o geométricos,que exijo a mis alumnos,me permite,después de tratar los ejercicios previos a los que se hace referencia en el nº 6 de NUMEROS, iniciar el tema de la forma que ponen de manifiesto los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1.

Nº de unids.	Precio por u.	Valor de la compra.
3 kg	40 ptas.	
1 1	90 ptas.	
		210 ptas.

1º) Expresa mediante una igualdad lo reflejado en la tabla adjunta.

2º) Supón ahora desconocido el primer valor de la ségunda columna. Represéntalo por una letra y escribe la igualdad (ecuación) correspondiente.

3º) Procede análogamente respecto al segundo valor de la columna primera.

4º) Redacta un problema que sea traducción de esta ecuación:

$3.40 + 2.x = 300$

Ejemplo 2.

En el siguiente cuadro figuran las notas de Matemáticas que un alumno obtuvo en las 5 evaluaciones del curso.

1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	Def.
7	4	6	6	7	

Si llamamos x a la nota definitiva(media aritmética), la ecuación que permite calcularla es

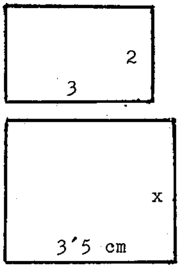
$$x = \frac{7 + 4 + 6 + 6 + 7}{5}$$

que resuelta da

$$x = 6$$

Pues bien, escribe este resultado en la tabla e imagínate ahora que se ha borrado la primera nota. Llámala x y calcúlala.

Ejemplo 3.

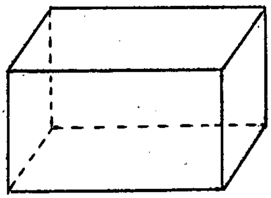


El cálculo del perímetro de este rectángulo se indica así

$$2.\ (3 + 2) = 10$$

Sabemos que el de este otro es 13 cm. Escribe y resuelve la ecuación que permita determinar su ancho.

Ejemplo 4.



Nuestro salón de clases tiene forma de ortoedro, como el representado en la figura. Tú sabes que el volumen del ortoedro se calcula multiplicando el área de la base por la altura o, lo que es lo mismo, multiplicando largo por ancho por alto. Si el salón tiene 150 m^3 de volumen, un largo de 10 m, un ancho de 5 m y una altura que no te digo, ¿qué tienes que hacer para conocerla sin tener que usar la escalera y la cinta métrica?

Ejemplo 5.

Calcula el volumen y la capacidad de un depósito cilíndrico de 1 m de radio y 1´5 m de altura.

Se quiere construir un recipiente cilíndrico de 12´56 dm^3 y 1 dm de radio. ¿Qué altura habrá que darle?

PROBLEMAS DE TRADUCCION INMEDIATA O CASI INMEDIATA

Abundando en este tipo de problemas - lo que ofrece además la ventaja de refrescar conocimientos anteriores - la mayor parte del alumnado capta la idea de que, en el fondo, el planteamiento de problemas por ecuaciones se reduce a escribir "lo que dice" el enunciado mediante una igualdad donde aparezcan los datos y el(los) valor(es) a calcular. No obstante, sigue teniendo dificultades de expresión. Entre otras muchas, las relativas a :

. No tener una idea clara del significado de expresiones tales como "excede en", "la razón de dos números es", etc.

. Falta de seguridad en, por ejemplo, cuándo debe escribirse 2.x+5 y cuándo 2.(x+5).

. Olvido o desconocimiento de las fórmulas para el cálculo de perímetros, áreas y volúmenes.

. Y, sobre todo, dificultad para entender lo que lee, que constituye seguramente la principal causa del actual fracaso escolar.

Propongo entonces una serie de ejercicios y problemas de traducción inmediata con este triple objetivo :

. Fijar la idea de que la ecuación a escribir es la traducción al lenguaje simbólico de la relación dada, más o menos explícitamente, en el enunciado del problema.

. Solventar las dificultades en cuanto a significado y simbolización de ciertas expresiones.

. Familiarizar al alumno con el mecanismo que permite expresar una incógnita en función de otra, esto es, representar dos valores desconocidos utilizando una sola letra, evitando así el recurrir innecesariamente a los sistemas de ecuaciones.

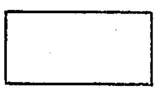
He aquí algunos ejemplos:

Ejemplo 6.

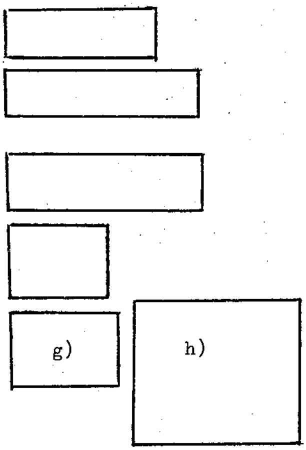
Representa los lados de las siguientes figuras con la información que se te da :

a) El semiperímetro es 20.

(Lo que se pretende es que escriba x y 20-x , no x e y)



b) El largo es doble del ancho.



c) El largo excede en 2 al ancho.

d) El ancho es los 3/4 del largo.

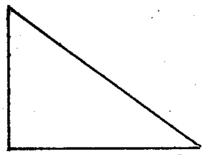
e) $S=2o\ m^2$

f) Los lados son entre si como 3 es a 4.

g) El perímetro es 30.

h) Largo y ancho difieren en 5.

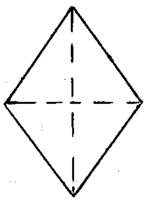
i) Las dimensiones son números consecutivos.



Ejemplo 7.

Expresa matemáticamente los siguientes enunciados:

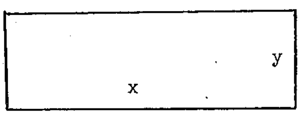
a) El área (S) es el semiproducto de las diagonales (D y d).

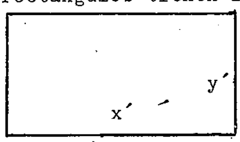


b) Las diagonales suman 20. Si representamos una de ellas por x, la otra será .....
Expresa el área (S).

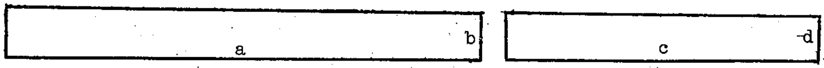
c) La superficie del círculo es el producto de π por el cuadrado del radio.

d) Los dos rectángulos tienen igual superficie.





e) El área del mayor excede en 14 m^2 a la del menor.



f) Un número es 6 veces mayor que otro. La suma de ambos es 147.

g) La diferencia de los cuadrados de dos números consecutivos es 31.

Trato luego los problemas clásicos que aparecen en los textos y lo hago como muestran los dos ejemplos que siguen:

Ejemplo 8.

Del dinero que tenía gasté la quinta parte y luego la tercera parte del resto. Me quedan aún 1600 ptas. ¿Cuánto tenía?

Tenía : x ptas.

$$\text{Gasté}\begin{cases} 1^{\underline{o}})\ \dfrac{x}{5} & \left(\text{Si gasté } \dfrac{x}{5}\text{, me quedaron } \dfrac{4x}{5}\right) \\[2ex] 2^{\underline{o}})\ \dfrac{4x}{5} : 3 = \dfrac{4x}{15} & \end{cases}$$

¿Qué relación hay entre los gastos,lo que me queda y lo que tenía? (Algunos alumnos tienen dificultad para verla,por lo que es necesario poner ejemplos prácticos).

Tal relación,escrita en palabras es:

Gastos + lo que me queda = Lo que tenía

Y traducida,esta ecuación:

$$\frac{x}{5} + \frac{4x}{15} + 1600 = x \Longrightarrow \dots\dots\dots\dots\dots \Longrightarrow x = 3000$$

Ejemplo 9.

Las dimensiones de un rectángulo suman 9 m . Si el largo se aumenta en 2 m y el ancho se disminuye en 1 m ,resulta otro rectángulo que tiene 2 m^2 menos de superficie que el primero. Se pide :

1º) Dibuja el primer rectángulo y dale nombre a sus dimensiones(fí jate : suman 9).

2º) Dibuja el otro y anota sus dimensiones.

3º) Preséntame lo hecho hasta ahora.

4º) El área del 2º tiene por expresión (8-x)(x+2). ¿Estás de acuer do?

Expresa la del 1º.

5º) Completa esta frase : Si el 2º tiene 2 m^2 menos que el 1º,es que " la diferencia entre el área .... ".

6º) Traduce al lenguaje simbólico la expresión entrecomillada.

7º) Resuelve la ecuación anterior. No olvides que x es una de las dimensiones del primer rectángulo; tienes que calcular también la otra.

8º) Calcula las superficies de ambos rectángulos.

PROBLEMAS EN QUE LA IGUALDAD A ESCRIBIR NO ESTA EXPRESAMENTE DICHA EN EL ENUNCIADO (De traducción no inmediata)

Son estos los más formativos y los que ofrecen mayor dificultad. Lo importante aquí es que el alumno llegue a ver claro que hay siempre algo (una deducción traducible,un teorema matemático o una ley física) que nos permite relacionar datos e incógnitas,es decir,escribir una ecua ción. Debe dársele tiempo para que piense - nada más inútil que limitar nos a resolver varios problemas a vía de ejemplos - y permitírsele consultar listas de teoremas y leyes físicas confeccionados al efecto. Interesa,sobre todo,ponerlo en contacto con un método de trabajo;no que resuelva problemas "tipo".

Como ejercitación previa,suelo entregarles un cuadernillo conteniendo unos 50 problemas y pedirles que escriban bajo cada uno la frase que,más tarde,han de traducir al lenguaje matemático. Este trabajo que simultáneo con la exposición de otros puntos del programa,se ampliará hasta la resolución total de los problemas,en un repaso final del tema.

Veamos un ejemplo:

Ejemplo 10.

Un comerciante compra bolsas de leche por valor de 7500 ptas. En el transporte se le estropean 5. Vende cada una de las restantes a 10 ptas. más, obteniendo una ganancia de 575 ptas. ¿Cuántas bolsas compró y a cuánto cada una?

Venta menos compra = Ganancia $\Longrightarrow$

$\Longrightarrow$ Nº de bolsas vendidas por precio de venta, menos nº de bolsas compradas por precio de compra, es igual a la ganancia obtenida.

Ejemplo 11.

Calcula las dimensiones de un rectángulo sabiendo que difieren en 6 cm y que su diagonal mide 30 cm. (Dibuja el rectángulo y busca un teorema que relacione largo, ancho y diagonal).

Ejemplo 12.

Una persona dispone de 2 horas para dar un paseo. Parte en tranvía con una velocidad media de 12 km/h y vuelve a pie con velocidad media de 4 km/h . ¿A qué distancia del punto de partida deberá dejar el tranvía? (López, V. y Sánchez Martín, J.L - Matemáticas 1 - Ed. S.M.)

(Piensa en esto : ¿Qué relación hay entre las distancias recorri en la ida y en la vuelta?).

JUSTIFICAR EL EMPLEO DE SISTEMAS DE ECUACIONES

Los textos suelen dividir los problemas de ecuaciones en "para resolver por una ecuación" y "para resolver mediante sistemas", pero se da la circunstancia de que la mayoría de los propuestos para emplear un sistema de dos ecuaciones, puede solucionarse planteando una sola ecuación. Creo que no debe usarse el sistema cuando no es imprescindible, ya que:

. Acostumbra al alumno a un procedimiento muy mecánico, más largo y poco formativo con vistas a otros campos de la Matemática.

. No le da una idea clara de cuándo hay necesariamente que recurrir a él.

Ejemplo 13.

Dos números son entre si como 3 es a 4, y la suma de sus cuadrados es 625. Calcúlalos.

Pienso que debe enseñarse a resolverlo así $(3x)^2 + (4x)^2 = 625$ y no aludir siquiera a que también puede procederse así:

$$\left.\begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{3}{4} \\ x^2 + y^2 = 625 \end{array}\right\}$$

Sólo cuando el alumnado haya adquirido la destreza suficiente en la resolución de problemas mediante una ecuación-tanto de 1º como de 2º grado-,debe enfrentársele a aquéllos en que no hay manera de representar una incógnita en función de otra. Entonces y sólo entonces deben tratarse los que requieren sistemas y enseñarles a resolver éstos. Y creo que el momento idóneo es cuando cursan 1º de B.U.P. o F.P.,no durante la E.G.B.

LA NECESIDAD DE RENOVAR EL REPERTORIO DE PROBLEMAS

Hay una realidad evidente : ha cambiado el enfoque de la enseñanza-aprendizaje de la Matemática,ha abierto ésta nuevas vías de conocimiento,las aplicaciones técnicas y al desarrollo de otras ciencias son cada vez más numerosas y fructíferas....y,sin embargo,seguimos proponiendo a nuestros alumnos los mismos desabridos tipos de problemas que los profesores de hace un siglo. He aquí un interesante campo de trabajo que necesita de la colaboración de todos. Sugiero al respecto las siguientes líneas de investigación:

. Analizar qué tipos de problemas de ecuaciones son realmente útiles para la resolución de otros de niveles superiores(últimos cursos de de B.U.P. y F.P. y C.O.U.).

. Extender este rastreo a la Física,Química y otras ciencias.

. Proceder simultáneamente a la redacción de nuevos problemas y ejercicios que cumplan tal fin.

Cabe cuestionarse,claro,si los problemas que actualmente se proponen en los citados niveles sirven en verdad para algo.