NÚMEROS
Revista de Didáctica de las Matemáticas
http://www.sinewton.org/numeros
ISSN: 1887-1984
Volumen 71, agosto de 2009, páginas 125–131

Un problema que se repite, algunas soluciones y la vendimia del señor Negramol, con un número misterioso.
(Problemas Comentados XXII)

J.A. Rupérez Padrón y M. García Déniz

-Club Matemático[1]-

Resumen Soluciones a los ejercicios propuestos en el anterior NÚMEROS, con especial incidencia en la metodología de su resolución, y propuesta de nuevos enunciados. Ejercicios de diferentes niveles y contenidos.

Palabras clave Organizar información; tabla doble entrada; grafos; razonamiento lógico.

Abstract Solutions to the exercises in the previous number, with special emphasis on the methodology of its resolution, and proposed new statements. Exercises at different levels and contents.

Keywords Organize information; Double entry table, Graphs, Logical reasoning

Para empezar, una disculpa: en el anterior artículo de esta serie, publicado en el número 70 de la revista, se incluía un problema llamado TABLA TRIANGULAR que por razones extrañas llevaba un gráfico de acompañamiento totalmente incorrecto, lo cual hacía muy difícil su comprensión. Pedimos perdón por el error y comenzamos esta entrega repitiendo íntegramente el texto y la imagen de dicho problema, confiando en que esta vez sí aparezca de la manera adecuada.

TABLA TRIANGULAR

Se colocan los enteros naturales en una tabla según la disposición siguiente. Una línea está señalada por el primer número de esta línea partiendo de la izquierda. Una columna está señalada por el primer número de esta columna partiendo de lo alto. Un número está por tanto señalado por la línea y la columna donde se encuentra. Por ejemplo, el número 15 está en (10, 9).
¿Cuáles son la línea y la columna de 1998?

				1				
			2	3	4			
		5	6	7	8	9		
	10	11	12	13	14	15	16	
17	...	...	...	...	...	...	...	...

[1] **El Club Matemático** está formado por los profesores **José Antonio Rupérez Padrón**, del IES de Canarias-Cabrera Pinto (La Laguna), y **Manuel García Déniz**, del IES Tomás de Iriarte (Santa Cruz de Tenerife).
mgarciadeniz@gmail.com / jaruperez@gmail.com

Sociedad Canaria *Isaac Newton*
de Profesores de Matemáticas

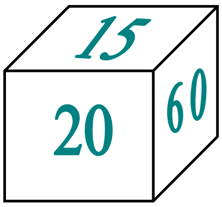
Los restantes problemas propuestos en dicho artículo sí estaban correctamente tratados y aquí damos nuestras respuestas. Esperamos coincidan con las que nuestros lectores hayan encontrado. De no ser así, ya saben, utilicen nuestros correos o el de la revista para darnos a conocer su discrepancia, su mejora o su alternativa. La publicaremos.

El primero de ellos, ¡PROBLEMA CUBO QUID!, presenta una interesante búsqueda de posibilidades. La utilización de herramientas gráficas organizativas, como puede ser una TABLA DE DOBLE ENTRADA, se ven aquí potenciadas de una manera natural. También es importante el uso de estrategias poco habituales; en este caso la ELIMINACIÓN, al tratarse de un problema con un fuerte componente de Lógica.

¡PROBLEMA CUBO QUID!

Sobre este cubo hay seis números enteros diferentes, inscrito cada uno sobre una cara. La suma de todos estos números es inferior a 350 y cada cara tiene un número que es el tercio, el cuarto, el triple o el cuádruplo del número inscrito sobre la cara opuesta.

¿Cuál es la suma de los números inscritos sobre el cubo?



Los datos de este problema son los valores de las tres caras conocidas, 15, 20 y 60, y los valores posibles de las caras desconocidas, tercio, cuarto, triple o cuádruplo de su respectiva cara opuesta. El objetivo es averiguar los valores de esas caras desconocidas, aunque la pregunta sea el valor de la suma de las seis caras. La relación entre los datos y el objetivo es que la suma de las caras ha de ser menor de 350 y los seis números enteros y distintos.

Este problema exige ORGANIZAR LA INFORMACIÓN suministrada, para lo cual es menester disponer de un organizador lógico adecuado que puede ser un diagrama de posibilidades como el siguiente:

	Tercio	Cuarto	Triple	Cuádruplo
15				
20				
60				

En él calcularemos para cada cara conocida las distintas posibilidades para su cara opuesta. En algún caso, no existirá esa posibilidad por no tener un valor entero. En algún otro podrá resultar un valor ya existente, con lo cual tampoco será válido.

	Tercio	Cuarto	Triple	Cuádruplo
15	**5**	**NO**	**45**	**~~60~~**
20	**NO**	**5**	**~~60~~**	**80**
60	**~~20~~**	**~~15~~**	**180**	**240**

Los dos 5 que aparecen repetidos se excluyen uno al otro. No pueden aparecer simultáneamente, pero sí uno solo de los dos.

Necesitamos ahora poner en marcha una búsqueda de las diferentes combinaciones entre los valores de las tres caras desconocidas. Son las siguientes:

$$5 + 80 + 180$$
$$5 + 80 + 240$$
$$45 + 5 + 180$$
$$45 + 5 + 240$$
$$45 + 80 + 180$$
$$45 + 80 + 240$$

Y una adecuada estrategia de ELIMINACIÓN nos permitirá quedarnos con las soluciones del problema para las caras. Dicha estrategia estará basada en la condición de sumar las seis caras menos de 350. Como las tres conocidas suman 15 + 20 + 60 = 95, las tres restantes habrán de sumar menos de 350 – 95 = 255.

$5 + 80 + 180 = 265 > 255$, no válido
$5 + 80 + 240 = 325 > 255$, no válido
$45 + 5 + 180 = 230 < 255$, solución
$45 + 5 + 240 = 290 > 255$, no válido
$45 + 80 + 180 = 305 > 255$, no válido
$45 + 80 + 240 = 365 > 255$, no válido

Hemos encontrado una solución única. No hay otra posible y cumple todas las condiciones del problema. Nos van a permitir responder a la pregunta.

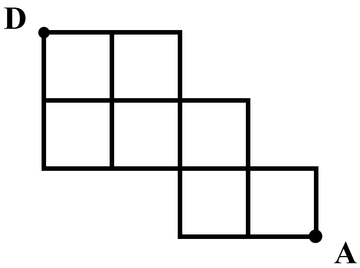
Respuesta.- **Las caras son 15 y 45, 20 y 5, 60 y 180, que suman 325 puntos, menos de 350**.

El siguiente problema, LA HORMIGA PASEANTE, corresponde a una parte de la matemática que no aparece habitualmente en el currículo español: los GRAFOS. Tal cosa resulta extraña hoy en día, pero eso no excluye la posibilidad de explorar de manera sencilla estos aspectos en la clase; la mejor manera de hacerlo es a través de problemas como éste, que pueden ser resueltos con facilidad e introducir aspectos matemáticos nuevos en el quehacer de nuestros alumnos.

LA HORMIGA PASEANTE

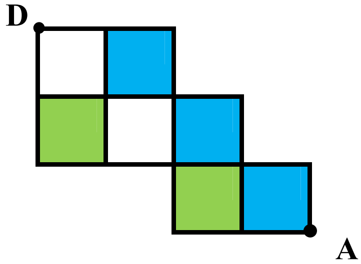
Partiendo del punto D, una hormiga quiere llegar al punto A tomando un camino lo más corto posible.

¿Entre cuántos caminos, lo más corto posibles, puede elegir la hormiga?

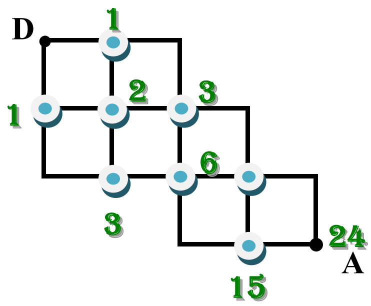


Un camino es un recorrido entre los vértices D y A realizado sobre los lados de los cuadrados de la figura. El camino más corto es aquel que recorra el menor número posible de esos lados; su medida será el total de lados recorridos. Para ello es necesario que el recorrido no vuelva sobre sí mismo, lo cual se consigue yendo siempre hacia la derecha o hacia abajo. Está prohibido, por tanto, ir hacia la izquierda o hacia arriba. El camino más corto es de 7 unidades. Pero se puede recorrer de varias maneras diferentes. El problema pide determinar esos caminos diferentes, de longitud 7, que se pueden realizar entre D y A.

Otro aspecto importante es darse cuenta de que los caminos se cruzan en los vértices de los cuadrados, pero no en todos. Salvo en los vértices de salida y llegada, los cruces deberán tener, al menos, tres caminos concurrentes. Eso quiere decir que hay cinco vértices que no suponen cambio de camino; son los que se encuentran en la parte superior de los cuadrados azules y en la parte inferior de los cuadrados verdes.



A cada vértice que es cruce de caminos se puede llegar desde dos vértices anteriores. El total de caminos por el que se puede llegar a él es la suma de los caminos que pueden llegar a cada uno de ellos. Procediendo a ese recuento, vértice a vértice, a partir del vértice D, llegaremos al vértice A con el total de caminos que llegan a él.



Respuesta.- **La hormiga podrá elegir, por tanto, entre 24 caminos**.

El otro problema, EL CARTERO, plantea unos aspectos estratégicos curiosos. La BÚSQUEDA DE PATRONES, el IR HACIA ATRÁS, el ENSAYO Y ERROR, UTILIZAR HERRAMIENTAS DE TIPO TABLA, para terminar con ANÁLISIS DE SECUENCIAS NUMÉRICAS. Son aspectos con pocas posibilidades de tener un tratamiento adecuado en la clase, pero en el tratamiento secuenciado de problemas, tal y como proponemos en esta serie de artículos, tiene cabida y se obtiene un fruto extraordinario al tiempo dedicado a su resolución.

EL CARTERO

En un edificio de X pisos (2 apartamentos por piso), el cartero debe distribuir N cartas. En el primer piso, entrega 1 carta al inquilino de la izquierda, y la octava parte de las cartas restantes al inquilino de la derecha. En el segundo piso, entrega 2 cartas al inquilino de la izquierda, y la octava parte de las cartas restantes al inquilino de la derecha. En el tercer piso, entrega 3 cartas al inquilino de la izquierda, y la octava parte de las cartas restantes al inquilino de la derecha, y así sucesivamente. En el piso X, entrega X cartas al inquilino de la izquierda, y no le queda ninguna carta para entregar al inquilino de la derecha.

¿Cuál es el número X de pisos del edificio y el número N total de cartas distribuidas por el cartero?

Un primer intento de resolución nos llevaría a utilizar el álgebra, codificando desde el reparto del primer piso hasta encontrar un patrón que determinase hasta que piso se puede llegar. Pero eso nos llevaría a un camino difícil y tortuoso, cada vez más complejo.

Es necesario, por tanto, empezar investigando algunas características de las condiciones del problema. Por ejemplo, teniendo en cuenta que el primer reparto se realiza en el primer piso entregando una carta en la izquierda y dividiendo el resto entre 8 para determinar las cartas entregadas en la derecha, es preciso que el numero de cartas inicial sea múltiplo de 8, más 1.

O sea, N = 8 k + 1, siendo N el número inicial de cartas. Por tanto, dicho número de cartas puede ser, según los distintos valores de k, los siguientes:

Para k = 0 → N = 1
Para k = 1 → N = 9
Para k = 2 → N = 17
Para k = 3 → N = 25
… etc.

Podremos probar a rellenar una tabla para cada valor de N y así comprobar cuales de esos valores dan correctos. Es necesario diseñar dicha tabla y tener como criterio la necesidad de que en cada momento del reparto los resultados parciales y finales sean enteros.

Cartas a entregar	Nº de piso	Cartas entregadas en la izquierda	Cartas restantes	Cartas entregadas en la derecha	Entregadas en el piso	Cartas para el siguiente piso

Y ahora la utilizaremos para analizar los tres primeros casos.

Para 1 carta a entregar:

Cartas a entregar	Nº de piso	Cartas entregadas en la izquierda	Cartas restantes	Cartas entregadas en la derecha	Entregadas en el piso	Cartas para el siguiente piso
1	1	1	0	0	1	0

Apreciamos que se cumple y es un caso trivial.

Para 9 cartas a entregar:

Cartas a entregar	Nº de piso	Cartas entregadas en la izquierda	Cartas restantes	Cartas entregadas en la derecha	Entregadas en el piso	Cartas para el siguiente piso
9	1º	1	8	8 : 8 = 1	2	9 – 2 = 7
7	2º	2	5	5 : 8 = ¿?		

Apreciamos ahora que no se satisface la condición exigida.

Para 17 cartas a entregar:

Cartas a entregar	Nº de piso	Cartas entregadas en la izquierda	Cartas restantes	Cartas entregadas en la derecha	Entregadas en el piso	Cartas para el siguiente piso
17	1º	1	16	16 : 8 = 2	1 + 2 = 3	17 – 3 = 14
14	2º	2	12	12 : 8 = ¿?		

Tampoco aquí se satisface la condición exigida.

Esto nos lleva a pensar que, si bien es un camino posible, resulta muy largo y sin garantía de terminar contemplando todo lo necesario.

Luego, es necesario utilizar otra estrategia; elegimos la de IR HACIA ATRÁS, puesto que conocemos como se desarrolla el proceso de la entrega de cartas y lo sucedido en el último piso. Utilizaremos la misma tabla pero al revés, yendo desde el último piso, aunque no sepamos cual es, hasta el primero.

Cartas a entregar	Nº de piso	Cartas entregadas en la izquierda	Cartas restantes	Cartas entregadas en la derecha	Entregadas en el piso	Cartas para el siguiente piso
X	Xº	X	0	0	X	-
	(X – 1)º	X – 1	8	1	X	X

En la primera fila razonamos que no deben ser entregadas cartas en la derecha porque así lo determinan las condiciones del problema; solo se entregan las X cartas de la izquierda, igual cantidad que el cardinal del piso. En la segunda fila sabemos con claridad que debe entregar X – 1 en la izquierda, tantas como el cardinal del piso, y deberán sobrar X cartas para el último piso. De ahí deducimos que las cartas entregadas en la derecha deben ser al menos 1, que representa la octava parte de 8 que, naturalmente, deben ser las restantes después de haber entregado las de la izquierda. Sobran 7 para el último piso, que ya sabíamos que estaban representadas por el valor X. Por tanto X = 7, lo que significa que el edificio tiene 7 pisos. Bastara ahora reiniciar la tabla HACIA ATRÁS pero con los valores ya determinados, y llegar hasta el primer piso donde conoceremos el total de cartas que tenía que distribuir el cartero.

Cartas a entregar	Nº de piso	Cartas entregadas en la izquierda	Cartas restantes	Cartas entregadas en la derecha	Entregadas en el piso	Cartas para el siguiente piso
7	7º	7	0	0	7	-
14	6º	6	8	1	7	**7**
21	5º	5	16	2	7	**14**
28	4º	4	24	3	7	**21**
35	3º	3	32	4	7	**28**
42	2º	2	40	5	7	**35**
49	1º	1	48	6	7	**42**

Obteniendo de esta manera la solución del problema, que, además, presenta algunas características dignas de observación.

El número de cartas entregadas en la izquierda es la sucesión creciente de los números naturales. Las cartas entregadas en la derecha forman la sucesión decreciente de los números naturales hasta el cero. El numero de cartas entregada en cada piso es invariable: **7**. El número de cartas a entregar es una sucesión de múltiplos consecutivos de 7. Interesante, ¿no?

El problema puede ser un buen pretexto para utilizar la hoja de cálculo con los alumnos y comprobar con ella que los valores mayores de 49 no dan solución posible. Aunque el método que hemos utilizado en la segunda estrategia nos indica que la solución es única.

Respuesta.- **El número de pisos del edificio es 7 y el número total de cartas distribuidas por el cartero es de 49**.

Siguiendo nuestra costumbre, proponemos ahora algunos problemas nuevos, que se añaden al que hemos repetido al comenzar, y que nos parecen interesantes. Tiene algún tiempo para resolverlos y escribirnos sus respuestas y comentarios. Serán atendidos.

TIEMPO DE VENDIMIA

En la viña del señor Negramol, en un día de vendimia se han llenado 18 cajones grandes y 13 cajones medianos con la uva recogida. Para transportar a la bodega los cajones llenos de uva, el señor Negramol dispone de 3 tractores:

- el tractor A puede transportar, a plena carga, 3 cajones grandes y 2 medianos;
- el tractor B puede transportar, a plena carga, 2 cajones grandes y 1 mediano;
- el tractor C puede transportar, a plena carga, 1 cajón grande y 1 mediano.

Ese día, el señor Negramol ha utilizado al menos una vez todos sus tractores y siempre a plena carga. ¿Cuántos viajes pueden haber sido hechos por el señor Negramol con cada tipo de tractor para el transporte de todos los cajones de uva a la bodega?

Describid todos los posibles viajes y explicad cómo los habéis hallado.

EL NÚMERO MISTERIOSO

Este número de seis cifras distintas, empieza y termina con cifras primas, de tal manera que si trasferimos la cifra final de la derecha al primer lugar de la izquierda, el número así obtenido es cinco veces superior al número original. Pero si transferimos la primera cifra de la izquierda al último lugar de la derecha, el número resulta tres veces el número original.

Si ahora movemos las tres primeras cifras del original y las colocamos al final, a la derecha del número, el resultado es seis veces el número inicial.

¿De qué número se trata?

Y aquí queda todo de momento. Pero recuerden nuestro sempiterno mensaje. Esta sección estará más viva si recibimos sus soluciones, sus comentarios o sus propuestas. Hágannos caso, escríbannos. Todos los lectores agradecerían leer mensajes y experiencias de otros compañeros.

Como siempre, aguardamos sus noticias a la espera de la próxima edición de la revista **NÚMEROS**.

Un saludo afectuoso del **Club Matemático.**